

2023 年浙江大学数学笔试

校订教学版：教学补全、改编及版本说明见题面与参考解答，不作为原卷逐字复原。

1. 求方程 $|2^x 3^y - 2^u 5^v| = 2$ 的所有正整数解 (x, y, u, v) 的组数。

2. 设 $\alpha, \beta \in (0, \pi/2)$, 求

$$\frac{\left(1 - \sqrt{\tan \frac{\alpha}{2} \tan \frac{\beta}{2}}\right)^2}{\cot \alpha + \cot \beta}$$

的最大值。

3. 满足 $A \cup B \cup C = \{1, 2, \dots, 2023\}$ 、 $A \cap B \cap C = \emptyset$ 的有序三元组 (A, B, C) 的组数为 n , 求 n 的最后两位数。

4. 2023 支足球队参加单循环赛, 胜方得 3 分、负方得 0 分、平局各得 1 分。所有比赛结束后, 各队总分构成公差为 1 的等差数列, 求最后一名得分的最大值。

5. 已知 $x, y \in \mathbb{N}^+$ 且 $x, y \in [1, 1897]$, 求满足 $\left\lfloor \frac{x}{y} \right\rfloor + 1$ 为 x 的倍数的正整数对 (x, y) 的个数。

6. 【明确非退化配置】凸四边形 $ABCD$ 外切于圆 O 。过 O 的一条直线分别交边 AB, CD 的内部于 K, L , 交对角线 AC, BD 的内部于 M, N , 且

$$\angle BKL = \angle CLK, \quad AM = 1, \quad MC = 2, \quad BN = 3.$$

求 ND 。

7. 求所有正整数 n , 使下述命题成立: 若 $a_1, a_2, \dots, a_n$ 构成等差数列, 且 $a_1 + 2a_2 + \dots + na_n$ 为有理数, 则 $a_1, a_2, \dots, a_n$ 中至少有一个有理数。

8. 任取正 n 边形的三个顶点构成三角形。若该三角形为钝角三角形的概率是 $\frac{93}{125}$, 求所有可能的 n 。

9. 过椭圆 $\frac{x^2}{a^2} + \frac{y^2}{b^2} = 1$ ($a > b > 0$) 的右焦点作两条互相垂直的弦 AC, BD 。已知四边形 $ABCD$ 面积的取值范围为 $[8, 25/2]$, 求 a/b 。

10. 【教学修订】 设 $f(x) = x^2 - 2x - 14\sqrt{x-1} + x\sqrt{x^2 - 4x - 28\sqrt{x-1} + 61}$ 。(1) 判断它是否有最大值；(2) 求其最小值及取等时的 x 。

11. 复数 a, b, c 满足 $|a|^2 + |b|^2 + |c|^2 = 1$, 求 $|ab(a^2 - b^2) + bc(b^2 - c^2) + ca(c^2 - a^2)|$ 的最大值。

12. 【多选】 判断下列命题中正确的选项, 并说明理由: A. 自然数集与有理数集无双射; B. 有理数集与实数集无双射; C. 实数集与整数集无双射; D. 实数集与复数集无双射。

13. 数列 $\{a_n\}$ 满足 $a_1 = \frac{1}{2}$,

$$a_{n+1} = \frac{a_n}{(1 - \sqrt{2})^{n+1}a_n + \sqrt{2} + 1},$$

求 $\lim_{n \rightarrow +\infty} \sqrt[n]{a_n}$ 。

14. 计算

$$\frac{\tan 96^\circ - \tan 12^\circ \left(1 + \frac{1}{\sin 6^\circ}\right)}{1 + \tan 96^\circ \tan 12^\circ \left(1 + \frac{1}{\sin 6^\circ}\right)}.$$

15. 数列 $\{a_n\}$ 满足 $a_1 = 1$, $a_{n+1} = \frac{a_n}{2a_n^2 + 1}$, 求 $\lfloor 2 \lg a_{2023} \rfloor$ 。

16. 求一个五位数 n , 满足 $2556 \mid n^3 - 1$, 使 n 的各位数字之和最小, 并求该最小值。