

2024 年清华大学数学笔试

说明：校订教学版：补回源页判断选项，必要的条件补订已标明；不作为原卷逐字复原。

1. 已知多重集 $\{\sin \theta, \sin 2\theta, \sin 3\theta\} = \{\cos \theta, \cos 2\theta, \cos 3\theta\}$, 求 θ 。
2. 已知 $e^a + a = \ln b + b = 4$, 判断下列命题: $a \ln b + \ln a > 1$; $a \ln b + \ln a = 1$; $ab < 4$; $ab > e$ 。
3. 某城市街道均为正东-正西或正南-正北走向。某人从某路段正中央出发, 每个点至多经过一次, 最终回到出发点。已知向左转 100 次, 判断可能向右转 96, 98, 104, 102 次中的哪些。
4. 在平面直角坐标系内, $M \in \{(x, y) \mid x^2/200 + y^2/8 \leq 1\}$, $A(2, 1)$ 。若 $\triangle OMA$ 面积不超过 3, 求满足条件的整点 M 的个数。【计数约定: 允许三点共线或重合, 此时面积按零计。】
5. 已知 $a_1 = 1$, $\frac{a_{n+1}}{a_n} = \frac{\lambda n^2 - 2n}{n+1}$ ($\lambda \geq 0$, 各项非零)。判断:
 - A. 存在 λ , 使存在正整数 N , 对所有 $n \geq N$, $a_{n+1} < a_n$ 。
 - B. 存在 λ , 使不存在上述最终严格递减的 N 。
 - C. 存在 λ , 使存在正整数 N , 对所有 $n \geq N$, $a_{n+1} > a_n$ 。
 - D. 存在 λ , 使不存在上述最终严格递增的 N 。
6. 已知 $a_1 = 1$, $a_{n+1} = a_n + \frac{1}{a_n^2}$ 。判断下列结论: $\lim a_n/\sqrt[3]{n} = \sqrt[3]{3}$; $\lfloor a_{400} \rfloor = 20$; $\lim a_n/\sqrt{n} = \sqrt{2}$; $\lfloor a_{900} \rfloor = 30$ 。
7. 正整数 $a, b, c \in \{1, 2, \dots, 100\}$, 且 $\frac{1}{a} + \frac{1}{c} = \frac{2}{b}$, $a > b > c$ 。求满足条件的有序三元组 (a, b, c) 的组数。

8. 从棱长为 1 的单位正方体底面顶点 A 出发, 每次等概率沿一条棱行走一个单位长度。记走 n 次后回到 A 的概率为 p_n , 判断: A. $p_4 = \frac{1}{2}(1 + 3^{-4})$ B. $p_2 = \frac{5}{9}$ C. $p_4 = \frac{1}{2}(1 - 3^{-4})$ D. $p_2 = \frac{1}{3}$
9. 圆周上 $A_1, A_2, \dots, A_7$ 七点两两相连, 任取两条线段, 求它们无公共点的概率。
10. $a_1, a_2, \dots, a_{10}$ 是 $1, 2, \dots, 10$ 的一个排列。对 $i = 2, 3, \dots, 9$, 要求 a_{i-1}, a_{i+1} 中至少一个大于 a_i 。求满足条件的排列数。
11. 直线 $l: ax + by + c = 0$, 不同点 $P(x_1, y_1), Q(x_2, y_2)$, 令 $\chi = \frac{ax_1 + by_1 + c}{ax_2 + by_2 + c}$ 。判断:
 A. 若 $\chi > 1$, 则 l 与射线 PQ 相交。
 B. 若 $\chi = 1$, 则 l 与射线 PQ 平行。
 C. 若 $\chi = -1$, 则 l 与射线 PQ 垂直。
 D. 若 χ 存在, 则 $Q \in l$ 。
12. 在 $\triangle ABC$ 中, $\angle A = 60^\circ$, $\angle BAP = \angle CAP$, P 在三角形内部。延长 BP 交 AC 于 Q , 且 $\frac{1}{|BP|} + \frac{1}{|CP|} = \frac{1}{|PQ|}$, 求 $\angle BPC$ 。
13. 关于比赛名次, 张三说“甲是第 4 名”, 李四说“乙不是第 2 或第 4 名”, 王五说“丙排在乙前面”, 刘六说“丁是第 1 名”。已知只有一个人说假话, 判断甲、乙、丙、丁的名次。
14. 计算 $\tan \left(\arctan 2 + \arctan \frac{2}{2^2} + \dots + \arctan \frac{2}{12^2} \right)$ 。

15. 已知 $a, b \in \mathbb{N}^*$, $a + b \leq 2024$ 。求使 $ab^2 + b + 7 \mid a^2b + a + b$ 的解的组数。
16. 点集 $S = \{(x, y) \mid x \leq 5, y \leq 4, x, y \in \mathbb{N}^*\}$, 求由 S 中的点可组成的不同三角形个数。
17. 已知 $2a_n a_{n+1} - 3a_{n+1} + 1 = 0, a_1 = 1/3$, 前 n 项和为 S_n 。判断: A. $\lim a_n = 1/2$ B. $S_n > (n-1)/6$
C. $\{(a_n - 1)/(a_n + 1)\}$ 是等比数列 D. $S_n < n/2$
18. 已知复数 $|z| = 1$, 且 $z^n = z + \sqrt{2}$, 求正整数 n 的最小值。
19. 正四面体边长为 $2\sqrt{2}$, 点 P 满足 $|\vec{PA} + \vec{PB}| = 2$ 。判断 $\vec{AP} \cdot \vec{AD}$ 的最大值或最小值。
20. 已知 $f(a, b, c) = \sqrt{\frac{a}{b+c}} + \sqrt{\frac{b}{c+a}} + \sqrt{\frac{c}{a+b}}$ ($a, b, c \geq 0$, 且三个分母均非零), 求其最大值与最小值。
21. 【据所求补全一次项】方程 $x^3 + px^2 + qx + r = 0$ 在 $(0, 2)$ 上有三个不同实根, 求 $p + q + r$ 的取值范围。

22. 四面体 $V-ABC$ 中, $VA=VB=2\sqrt{2}$, $VC=3$, $CA=CB=4$, 求直线 CA 与 VB 所成角的取值范围。

23. 已知 $f(x) = \frac{x-1}{e^x}$ 。判断:

- A. 若 $f(x) = a$ 有两个不同实根 x_1, x_2 , 则 $x_1 + x_2 = 4$ 。
- B. $f(x) = a$ 有两个不同实根的充要条件为 $a \in (0, e^{-2})$ 。
- C. 对任意 $m \in \mathbb{R}$, $|f(x) + m|$ 均有最小值。
- D. 对任意 $m \in \mathbb{R}$, $|f(x) + m|$ 均有最大值。

24. f 是 $[0, 1]$ 上连续函数, 设 $A_n = \sum_{k=1}^n \left| f\left(\frac{k-1}{n}\right) - f\left(\frac{k}{n}\right) \right|$ 。对正整数 m, n , 判断: A. $A_n \leq A_{2n}$
B. $A_n \leq A_{n+m}$ C. $2A_n \leq A_{2n}$ D. $2A_n \leq A_{n+m}$

25. 双曲线 $C: x^2/a^2 - y^2/b^2 = 1$ ($a, b > 0$), 斜率为 1 的直线 l 交 C 于 A, B 。点 D 是 C 上另一点且 $AD \perp BD$, O 为原点。 $\triangle AOD, \triangle BOD$ 的重心分别为 P, Q , $\triangle ABD$ 外心为 M 。若 $k_{OP}k_{OQ}k_{OM} = -8$, 求双曲线离心率。

26. 过抛物线 $x^2 = 4y$ 焦点 F 的直线交抛物线于 $A(x_1, y_1), B(x_2, y_2)$ 。过 B 作与抛物线在 A 处切线平行的直线, 交抛物线于另一点 $D(x_3, y_3)$, 交 y 轴于 E 。判断 $x_2 + x_3 = 3x_1$ 、 $|FB| = |FE|$ 、 $\triangle ABD$ 面积最小值为 16、 $y_1y_2 = 1$ 中哪些正确。

27. $f(x) = \ln x + \cos x$ 的所有极值点依次为 $a_1, a_2, \dots$, 求 $\lim_{n \rightarrow +\infty} |a_{n+1} - a_n|$ 。

28. $f(u) = u^2 + au + b - 2$, $u = x + 1/x$ ($x \in \mathbb{R} \setminus \{0\}$)。若存在这样的 u 使 $f(u) = 0$, 求 $a^2 + b^2$ 的最小值。