2022 年清华大学强基计划数学试题

校订教学版：第 5 题补充实体定义；第 6 题将函数条件限定在 $[0,1]$；第 7、11 题据另一来源校正。

1. 定义运算 & 满足 $x\&(y\&z)=x\&y+z$、$x\&x=0$，求 $2000\&2022$。

2. 若 $a^2+b^2+c^2+d^2+e^2=1$，求 $|a-b|+|b-c|+|c-d|+|d-e|+|e-a|$ 的最大值。

3. 已知复数 z 满足 $|z|=1$，求 $|(z-2)(z+1)^2|$ 的最大值。

4. 在复平面内，复数 z_1 的终点在线段（端点为 $1+i$ 与 $1+ai$）上移动，$|z_2|=1$。若 $z=z_1+z_2$ 的终点构成区域的面积为 $\pi+4$，求 a 的可能值。

5. （教学补订）在棱长为 2 的正方体 $[0,2]^3$ 中，以平面 $x+y+z=3$ 截取满足 $x+y+z\geq 3$ 的部分，求所得凸多面体的体积。选项：$\dfrac{23}{6},\dfrac{13}{3},3,4$。

6. 函数 $f:[0,1]\to\mathbb{R}$ 满足：对所有 $x\in[0,1]$，$f(x)+f(1-x)=1$、$f(x)=2f(x/5)$，且当 $0\leq x_1\leq x_2\leq 1$ 时 $f(x_1)\leq f(x_2)$。求 $f(1/2022)$。

7. 用蓝、红两色给一排 10 个方格染色，要求不能出现连续三个蓝色方格，求染色方法数。

8. 对于三个正整数 a, b, c，$\sqrt{a+b}$、$\sqrt{b+c}$、$\sqrt{c+a}$ 为三个连续正整数，求 $a^2+b^2+c^2$ 的最小值。

9. 已知 $a^2+ab+b^2=3$，求 a^2+b^2-ab 的最大值和最小值。

10. 计算 $\lim\limits_{n\to\infty}\sum\limits_{k=1}^{n}\frac{1}{n}\sin\frac{(2k-1)\pi}{2n}$。

11. 对于曲线 $C:(x^2+y^2)^3=16x^2y^2$，判断：
(A) 仅过 $(0,0)$ 一个整点；(B) 曲线上点距原点最大距离为 2；(C) 所围成图形面积大于 4π；(D) 曲线为轴对称图形。

12. 任意四边形 $ABCD$ 中，$\overrightarrow{AC}=\vec{a}$、$\overrightarrow{BD}=\vec{b}$，用 $\vec{a},\vec{b}$ 表示 $(\overrightarrow{AD}+\overrightarrow{BC})\cdot(\overrightarrow{AB}+\overrightarrow{DC})$。

13. 已知 $ax+by=1$、$ax^2+by^2=2$、$ax^3+by^3=7$、$ax^4+by^4=18$，求 ax^5+by^5。