

## 2021 年清华大学自强计划数学试卷

校订教学版：第 3 题明确自然定义域，第 8、13 题含无法定义的转写，作显式教学补订；第 15 题排除零方程。

### 综合题

1.  $a_n = \sqrt{\frac{2n-1}{4n^2+1}}$ , 前  $n$  项和为  $S_n$ , 求与  $S_{128} - S_{32}$  最接近的整数。

2. 若  $x, y$  为两个不同的质数, 是否存在正偶数  $n$ , 使  $(x+y) \mid (x^n + y^n)$ ?

3. 已知

$$f(x) = \frac{x + 1/x}{[x] + [1/x] + 2},$$

取  $x \in \mathbb{R} \setminus \{0\}$  且分母不为零。分别判断是否存在  $x$  使  $f(x) = \frac{4}{3}$  或  $\frac{8}{5}$ 。

4. 数列  $\{a_n\}$  满足  $a_{n+1}a_n - 2n^2(a_{n+1} - a_n) + 1 = 0$ ,  $a_1 = 1$ , 前  $n$  项和为  $S_n$ , 求  $S_{15}$ 。

5. 在  $\triangle ABC$  中,  $D$  是  $BC$  的中点,  $\angle DAC = 15^\circ$ , 求  $\angle ABC$  的最大值。

6. 四棱锥  $P-ABCD$  中,  $\angle APB = \angle APD = \angle PBC = \angle PDC = 90^\circ$ , 且  $AP = PB = PD = BC = CD = 2$ , 求四棱锥的高。

7. 从  $\{1, 2, \dots, 12\}$  中任取 3 个数, 求其和能被 3 整除的概率。

8. (教学补订) 令  $f(x) = (x-1)(x-2)\cdots(x-100)$ ,  $f'(x) = 0$  的 99 个不同实根记为  $a_i (i = 1, \dots, 99)$ 。求
- $$\sum_{i=1}^{99} \sum_{i \neq j} [(a_i - a_j)^{-1}].$$
9. 复数  $z$  满足  $|z| = 1$ , 求  $|z^3 - z + 2|$  的最值。
10. 在  $\triangle ABC$  中,  $D, E$  分别为  $BC, AC$  的中点,  $AD = 1, BE = 2$ , 求  $S_{\triangle ABC}$  的最大值。
11. 矩形  $ABCD$  中,  $AB = 2, BC = 1$ 。折叠使  $A, C$  重合, 折痕为  $MN$ ; 打开平面  $ADMN$ , 使二面角  $A - MN - C = \pi/3$ 。求直线  $MN$  与直线  $AC$  的距离。
12. 双曲线  $x^2 - y^2 = a^2 (a > 0)$  的左右顶点为  $A, B$ ,  $P$  为右支上异于顶点的一点, 设三角形内角  $\angle PAB = \alpha, \angle PBA = \beta, \angle APB = \gamma$ 。判断下列等式: A.  $\tan \alpha + \tan \beta + \tan \gamma = 0$ ; B.  $\tan \alpha + \tan \beta - \tan \gamma = 0$ ; C.  $\tan \alpha + \tan \beta + 2 \tan \gamma = 0$ ; D.  $\tan \alpha + \tan \beta - 2 \tan \gamma = 0$ 。
13. (教学补订) 已知  $\frac{x|x|}{4} + \frac{y|y|}{3} = 1, y = f(x)$ 。判断: A.  $f$  在  $\mathbb{R}$  上单调递减; B.  $2f(x) + \sqrt{3}x = 0$  有实数解; C. 图象不过第三象限; D. 值域为  $\mathbb{R}$ 。
14.  $a_n$  是离  $\sqrt{n}$  最近的整数, 求  $S_{2021}$ 。
15.  $a, b, c$  成等差数列且  $(a, b) \neq (0, 0)$ , 点  $P$  到直线  $l: ax + by + c = 0$  的垂足为  $M, P(-1, 0), N(2, 1)$ 。判断: A.  $l$  过定点; B.  $P$  到  $l$  的最大距离为  $2\sqrt{2}$ ; C.  $MN$  的最大值为  $3\sqrt{2}$ ; D.  $MN$  的最小值为  $\sqrt{2}$ 。
16. 实数  $a, b, c$  满足  $a + bc = b + ac = c + ba = 1$ 。判断: A.  $a = b = c$ ; B.  $a, b, c$  不全相等; C.  $(a, b, c)$  有 2 组; D.  $(a, b, c)$  有 5 组。