

2021 年清华大学冬令营数学试卷

校订教学版：第 3 题排除恒零函数，第 4 题明确共同变化量，第 8 题明确 E 为边的内部点。

选择题

1. $U = \{1, 2, 3, 4, 5, 6, 7\}$, $A \cap \complement_U B = \{1, 3, 4, 6\}$, 求 $\complement_U A \cup B$ 。选项: $\{2, 5, 7\}$, $\{1, 3, 4, 6\}$, U , $\emptyset$ 。
2. m, n 为不同直线, α, β 为不同平面, $m \perp \alpha, n \subset \beta$ 。问 “ $m \perp n$ ” 是 “ $\alpha \parallel \beta$ ” 的何种条件?
3. $f(x) = a \sin x - b \cos x$, 其中 $a^2 + b^2 > 0$, 其最大值在 $x = \pi/4$ 处取得, 判断 $f(x + \pi/4)$ 的奇偶性及中心对称点 (候选点为 $(\pi, 0)$ 或 $(3\pi/2, 0)$)。
4. 固定非零向量 $\vec{a}, \vec{b}$, 满足 $|\vec{a} - \vec{b}| = 4$ 且 $\vec{a} - \vec{b}$ 与 $\vec{a}$ 夹角为 $\pi/6$ 。非零向量 $\vec{c}$ 满足 $(\vec{c} - \vec{a}) \cdot (\vec{c} - \vec{b}) = -15/4$ 。求当 $\vec{c}$ 及实数 λ 均可变化时 $|\vec{c} - \lambda \vec{a}|$ 的最小值。选项: $1, \frac{2}{3}, \frac{1}{2}, \frac{3}{4}$ 。
5. 随机变量 X 取 $0, 1, 2$ 的概率分别为 a, b, c 。若 $4a, b, c$ 成等比数列, 求 $D(X)$ 的最大值。选项: $\frac{1}{6}, \frac{1}{3}, \frac{1}{2}, 1$ 。
6. P, Q, M 是椭圆 $C: x^2/a^2 + y^2/b^2 = 1$ ($a > b > 0$) 上不同三点, 原点 O 是 $\triangle PQM$ 的重心。若 $M(\frac{\sqrt{2}}{2}a, \frac{\sqrt{2}}{2}b)$, 直线 PQ 的斜率恒为 $-\frac{1}{2}$, 求椭圆离心率。选项: $\frac{\sqrt{2}}{3}, \frac{\sqrt{3}}{3}, \frac{\sqrt{2}}{2}, \frac{\sqrt{3}}{2}$ 。
7. $a_1 = \frac{1}{2}$, $a_{n+1} = e^{a_n - 1}$, T_n 为前 n 项乘积。判断: A. $a_{100} < 1/2$; B. $a_{100} > 1$; C. $T_{99} \in (0, 1/100)$; D. $T_{99} \in (1/100, 1/10)$ 。

填空题

8. 在 $\triangle ABC$ 中, D 为 BC 中点, E 在线段 BC 内部, 且 $AE = AC = BE$, $DE = 1$ 。若 $\cos C = 1/3$, 求 $\triangle ABC$ 的面积。
9. 双曲线 $x^2/a^2 - y^2/b^2 = 1$ 的焦点为 F_1, F_2 。过 F_1 作与一条渐近线垂直的直线 l , 其与左右两支交于 M, N 。若 $|MN| = |NF_2|$, 求渐近线方程。

10. $f(x) = |x^2 + a| + |x|$ 。当 $x \in [-1, 1]$ 时, 记最大值为 $M(a)$, 求 $M(a)$ 的最小值。

解答题

11. $\{a_n\}$ 是公差 $d \neq 0$ 的等差数列, 且 $\{a_{k_n}\}$ 是等比数列, 其中 $k_1 = 3, k_2 = 5, k_3 = 9$ 。(1) 求 $k_1 + k_2 + \cdots + k_n$; (2) 设 $b_n = \frac{a_{n+1}}{a_{n+2}} + \sqrt{\frac{a_n}{a_{n+2}}}$, 证明

$$\sum_{j=1}^n \frac{1}{j(j+1)\sqrt{2b_j}} < \sqrt{\frac{n}{n+1}}.$$

12. 四棱柱 $ABCD-A'B'C'D'$ 中, 平面 $DCC'D' \perp$ 平面 $ABCD$, 底面 $ABCD$ 为等腰梯形, $DA = AB = BC = 1$, $DD' = DC$, $\angle ADC = \pi/3$, M 为 CD 中点。(1) 证明 $A'M \parallel$ 平面 $B'BCC'$; (2) 若 $\angle D'DC = \pi/3$, 求 $A'M$ 与平面 $DAA'D'$ 所成线面角的正弦值。

13. 抛物线 $x^2 = 4y$ 上第一象限内一点 A 的切线 l 交 x 轴于 B 。过 B 作 l 的垂线 l' , 交抛物线于 C, D , 其中 C 在第一象限; l' 交 y 轴于 K 。(1) 若 A 的横坐标为 2, 求 l ; (2) 连接 OC, OD, AK, AC , 记 $\triangle OKD, \triangle OKC, \triangle AKC$ 面积为 S_1, S_2, S_3 , 求 $\frac{S_3}{S_2} \left(\frac{S_1}{S_2} - 1 \right)$ 的最小值。

14. $f(x) = \ln(x+1) - ax - 1$, 其中 $a \leq -3/10$ 。(1) 证明 f 有唯一零点; (2) 设零点为 x_0 , 证明

$$\frac{1}{1-a} \leq x_0 \leq 1-a,$$

以及

$$\frac{3-10a+8a^2-2a^3}{2(2-a)^2} \leq f(x_0+1) \leq \frac{a^2-3a+1}{2-a}.$$

($\ln 2 \approx 0.693, \ln 3 \approx 1.098$.)