

2020 年清华大学强基计划数学试题

校订教学版：第 13、19 题补回判断内容；第 18 题为明确补足凹性条件的教学版本，第 19 题 C 项为缺项补编。

1. 已知 $x^2 + y^2 \leq 1$ ，求 $x^2 + xy - y^2$ 的最值。
2. 在非等边三角形 ABC 中， $BC = AC$ ， O, P 分别为外心、内心， D 在 BC 上且 $OD \perp BP$ 。判断： B, O, D, P 四点共圆； $OD \parallel AC$ ； $OD \parallel AB$ ； $DP \parallel AC$ 。
3. A, B, C 均为 $\{1, 2, \dots, 2020\}$ 的子集，且 $A \subseteq C, B \subseteq C$ 。求有序三元组 (A, B, C) 的个数。
4. 数列满足 $a_0 = 0, |a_{i+1}| = |a_i + 1|$ 。令 $A = \left| \sum_{k=1}^{20} a_k \right|$ ，判断 A 是否可能等于 $0, 2, 10, 12$ 。
5. P 为椭圆 $\frac{x^2}{4} + \frac{y^2}{3} = 1$ 上一点， $A(1, 0), B(1, 1)$ ，求 $|PA| + |PB|$ 的最值。
6. $\triangle ABC$ 三边均为整数且面积为有理数，判断某一边长 a 是否可以为 $1, 2$ 或 4 。
7. P 为双曲线 $\frac{x^2}{4} - y^2 = 1$ 上异于顶点的一点， $A(-2, 0), B(2, 0)$ ，令三角形内角 $\angle PAB = \alpha, \angle PBA = \beta$ ，判断下列量中的定值： $\tan \alpha \tan \beta, \tan \frac{\alpha}{2} \tan \frac{\beta}{2}, S_{\triangle PAB} \tan(\alpha + \beta), S_{\triangle PAB} \cos(\alpha + \beta)$ 。
8. 甲、乙、丙做同一道题。甲说“我做错了”，乙说“甲做对了”，丙说“我做错了”。老师说仅一人做对且一人说错。判断甲、乙、丙谁做对。
9. 在直角三角形 ABC 中， $\angle ABC = 90^\circ, AB = \sqrt{3}, BC = 1$ 。若 $\frac{\overrightarrow{PA}}{|PA|} + \frac{\overrightarrow{PB}}{|PB|} + \frac{\overrightarrow{PC}}{|PC|} = \vec{0}$ ，判断 $\angle APB, \angle BPC$ 是否为 120° ，以及 $2BP = PC, AP = 2PC$ 是否成立。

10. 计算 $\lim_{n \rightarrow \infty} \sum_{k=1}^n \arctan \frac{2}{k^2}$ 。
11. 从 $0, 1, \dots, 9$ 中任取 5 个不同数字组成一个五位数或以 0 开头的“四位数”。求所得数能被 396 整除的概率。
12. 随机变量 X 满足 $P(X = k) = 2^{-k}$ ($k = 1, 2, \dots$)，令 Y 为 X 除以 3 的余数，求 $E(Y)$ 。
13. 若 $|\vec{a}| \leq 1, |\vec{b}| \leq 1$ ，且 $|\vec{a} + 2\vec{b} + \vec{c}| = |\vec{a} - 2\vec{b}|$ ，求 $|\vec{c}|$ 的最大值与最小值。
14. 对 $x, y \in \mathbb{N}^*$ ，判断下列哪一对式子可以同时为完全平方数： $x^2 + 2y, y^2 + 2x$ ； $x^2 + 4y, y^2 + 4x$ ； $x^2 + 5y, y^2 + 5x$ ； $x^2 + 6y, y^2 + 6x$ 。
15. 计算 $\sin \left(\arctan 1 + \arccos \frac{3}{\sqrt{10}} + \arcsin \frac{1}{\sqrt{5}} \right)$ 。
16. 正四棱锥中，相邻两侧面所成内部二面角为 α ，侧棱与底面夹角为 β ，求 $\tan \beta$ 与 $\cos \alpha$ 的关系。
17. 设 $f(x) = \frac{2e^x}{e^x + e^{-x}} + \sin x$ 。求 $f(x)$ 在 $[-2, 2]$ 上上界与下界之和。
18. (教学补订) f 在 $[a, b]$ 上二阶连续可导， $f \geq 0, f'' \leq 0$ ，且最大值在 $c \in (a, b)$ 处取得。令 $S(t) = \int_a^t f(x) dx$ ($a \leq t \leq b$)。用 f 及 f' 的适当函数值表示 S' 与 f' 在 $[a, b]$ 上的最大值。
19. 若实数数列 $\{a_n\}$ 的每个前 n 项和都等于该数列的某一项，则称其具有性质 P 。判断：
- (A) $a_1 = 1, a_n = 2^{n-2}$ ($n \geq 2$) 具有性质 P ；
 - (B) 对任意实数 k ， $a_n = kn$ 具有性质 P ；
 - (C) (缺项教学补编) 所有非零等比数列都具有性质 P ；
 - (D) 任意等差数列都能逐项表示为两个具有性质 P 的实数数列之和。