

2019 年清华大学自主招生数学试卷

1. 一个四面体的棱长分别为 $6, 6, 6, 6, 6, 9$, 求其外接球半径。A. $\sqrt{21}$ B. $\frac{\sqrt{21}}{2}$ C. $\frac{\sqrt{210}}{3}$ D. $\frac{\sqrt{210}}{6}$
2. 求 $\int_{-1}^1 (1 - \sin x)x^2 dx$ 。(原选项不全, 改作填空题。)
3. P 为单位圆上一动点, $A(0, 2), B(0, -1)$, 求 $|AP| \cdot |BP|^2$ 的最大值。A. $3\sqrt{2}$ B. $3\sqrt{3}$ C. 6 D. 8
4. $A = \{1, 2, \dots, 15\}$, $B = \{1, 2, 3, 4, 5\}$, f 是 A 到 B 的映射。若 $f(x) = f(y)$, 则称有序数对 (x, y) 为“好对”。求“好对”个数的最小值。A. 30 B. 45 C. 60 D. 75
5. 已知 $a_{n+1} = a_n^2 - 3a_n + 4$, $a_1 = 3$, 判断正确选项: A. $\{a_n\}$ 单调递增; B. $\{a_n\}$ 无界; C. $\lim_{n \rightarrow \infty} \left(\frac{1}{a_1 - 1} + \dots + \frac{1}{a_n - 1} \right) = 1$; D. $a_{100} = 1$ 。
6. 棱长为 1 的正方体 $ABCD - A_1B_1C_1D_1$ 中, E 为棱 AA_1 的中点, AC 与 BD 交于 O 。平面 α 过 E 且与 OC_1 垂直, 求 α 截正方体所得截面的面积。A. $\frac{\sqrt{6}}{4}$ B. $\frac{\sqrt{2}}{2}$ C. $\frac{\sqrt{3}}{2}$ D. 1
7. $a_n = (n - \frac{1}{2})(\frac{9}{10})^n$, $b_n = a_{n+1} - a_n$, 判断正确选项: A. $\{a_n\}$ 中最大项为 a_9 ; B. $\{b_{n+1}/b_n\}$ 中最大项为 0.27; C. $\{a_n\}$ 中最小项为 a_1 ; D. $\{b_{n+1}/b_n\}$ 中最小项为 -0.9 。
8. A, B, C, D, E 五支队伍两两比赛。已知 A 打一场、 B 打两场、 C 打三场、 D 打四场, 问 E 打几场? A. 1 B. 2 C. 3 D. 4
9. 椭圆 $\frac{x^2}{6} + \frac{y^2}{2} = 1$ 的右焦点为 $F(2, 0)$ 。直线 l 过 F 交椭圆于 A, B , P 在 $x = 3$ 上。若 $\triangle ABP$ 为正三角形, 求 $S_{\triangle PAB}$ 的最大值。A. $\frac{\sqrt{3}}{2}$ B. $\sqrt{3}$ C. $\frac{3\sqrt{3}}{2}$ D. $2\sqrt{3}$

10. 已知 $(2 + \sqrt{3})^n = x_n + y_n\sqrt{3}$, 判断正确选项: A. $x_{n+1} = 2x_n + 3y_n$; B. $y_{n+1} = x_n + 2y_n$; C. $\lim_{n \rightarrow \infty} (2 - \sqrt{3})^n = 0$; D. 存在 $x_n = 2019$ 。
11. l_1, l_2 在平面上, $A_1 \in l_1, A_2 \in l_2$, P 为 A_1A_2 的中点。判断正确选项: A. 若 $l_1 \parallel l_2$, 则 P 的轨迹为直线; B. 若 $l_1 \parallel l_2$, 则轨迹为射线; C. 若 l_1, l_2 相交, 则 P 可取平面上所有点; D. 若相交, 则不能取到所有点。
12. $f(x) = \frac{x-1}{e^x}$, 判断正确选项: A. $f(x) \geq 0$ 的解集为 $0 < x < 1$; B. 解集为 $x \geq 1$; C. $f(x)$ 与 $y = 2x - 1$ 仅有一个交点; D. $f(x)$ 与 $y = \frac{1}{3}(x - 1)$ 仅有一个交点。
13. AB 为圆 O 的直径, C 在圆上且 $CO \perp AB$, M 为 AC 中点, $CH \perp MB$ 于 H 。(教学补订: 明确 C 在圆上。) 判断正确选项: A. $OH = \frac{1}{2}AM$; B. $OH = \frac{1}{2}AH$; C. $\triangle AHM \sim \triangle BAM$; D. $\triangle BHO \sim \triangle BAM$ 。
14. 圆 $x^2 + y^2 = 4$ 在点 (x_0, y_0) 处的切线交抛物线 $y^2 = 8x$ 于 A, B , 且 $\angle AOB = 90^\circ$ (O 为原点), 求 x_0 。A. 2 B. 1 C. $\frac{2}{3}$ D. $\frac{1}{2}$
15. 求 $f(x) = |x - 1| + |x - 3| + 2e^x$ 的最小值。A. $3 \ln 2$ B. $4 \ln 2$ C. 5 D. 6
16. 已知 $x^3 + 27y^3 + 9xy = 1$, 判断关于 x^3y 的正确选项: A. 最大值为 $\frac{1}{3}$; B. 最大值为 $-\frac{27}{64}$; C. 最小值为 $-\frac{\sqrt{3}}{3}$; D. 没有最小值。
17. 从 $\{1, 2, 3, 4, 5, 6\}$ 的全部三元子集中等可能地取 A , 以其补集为 B (教学补订: 补全随机模型)。记 A 中最大、最小元素为 x_1, x_2 , B 中最大、最小元素为 y_1, y_2 , 令 $X = x_1 - x_2, Y = y_1 - y_2$ 。判断: A. $E(X) = \frac{7}{2}$; B. $E(X) = \frac{7}{4}$; C. $P(X = Y) = \frac{2}{5}$; D. $P(X = Y) = \frac{3}{10}$ 。
18. 若 $x_1^4 + x_2^4 + \cdots + x_n^4 = 799$ 有正整数解, 求正整数 n 的最小值。A. 11 B. 13 C. 15 D. 17

19. 判断正确选项：

- A. $\sin \frac{2\pi}{7} + \sin \frac{4\pi}{7} + \sin \frac{6\pi}{7} = 1$;
B. $\cos \frac{2\pi}{7} + \cos \frac{4\pi}{7} + \cos \frac{6\pi}{7} = \frac{1}{2}$;
C. $\sin 6^\circ \sin 42^\circ \sin 66^\circ \sin 78^\circ = \frac{1}{16}$;
D. 将 C 中正弦全换成余弦后等式成立。

20. 若 $A \cap B = \emptyset, A \cup B = \mathbb{N}^*$, 称 (A, B) 为一个二分划。判断：A. A 为正的 3 倍数、 B 为形如 $3k \pm 1$ 的正整数；B. A 为正质数、 B 为正合数；C. 存在二分划使 A 中无三个互异的数成等差数列且 B 中无递增无穷等差数列；D. 存在二分划使 A 中无三个互异的数成等比数列且 B 中无递增无穷等比数列。（教学补订：补全 D，并排除常数数列。）

21. 四面体 $PABC$ 中， $AB = PA = 2AC = 2$, $PA \perp$ 平面 ABC , $\angle BAC = 120^\circ$, 求外接球表面积。A. $\frac{20\pi}{3}$ B. $\frac{20\sqrt{3}\pi}{3}$ C. $\frac{40\pi}{3}$ D. $\frac{40\sqrt{3}\pi}{3}$

22. $u = \frac{x + \sqrt{3}y}{\sqrt{x^2 + y^2}}$, $D = \{(x, y) \mid x^2 + (y - 2)^2 \leq 1\}$ 。若 $(x, y) \in D$, 判断：A. $u_{\min} = 1$; B. $u_{\max} = 2$;
C. $u_{\min} = 0$; D. $u_{\max} = 3$ 。

23. $a, b \geq 0$, $ab(a + 8b) = 20$, 求 $a + 3b$ 的最小值。A. 4 B. 5 C. $\sqrt[3]{60}$ D. $\frac{4\sqrt[3]{60}}{3}$

24. 长方体底面 $ABCD$ 为边长 1 的正方形, $BB_1 = 2$, M, N, P 分别为 CC_1, CD, DD_1 的中点, 求 P 到平面 BMN 的距离。

25. 若对任意 $c \in \mathbb{R}$, 存在 a, b 使 $\frac{f(a) - f(b)}{a - b} = f'(c)$, 称 f 满足性质 T。下列不满足性质 T 的是：
A. $x^3 - 3x^2 + 3x$; B. $1/(x^2 + 1)$; C. e^{x+1} ; D. $\sin(2x + 1)$ 。

26. 已知 $|\vec{a}| = |\vec{b}| = 1$, $\vec{a} \cdot \vec{b} = \frac{1}{2}$, $(\vec{c} - \vec{a}) \cdot (\vec{c} - \vec{b}) = 0$ 。若 $|\vec{d} - \vec{c}| = 1$, 求 $|\vec{d}|$ 的最大值。

27. a 为 4444^{4444} 的各位数字之和, b 为 a 的各位数字之和, c 为 b 的各位数字之和, 求 c 。A. 5
B. 6 C. 7 D. 16

28. 正整数 x, y 满足 $\frac{1}{x} + \frac{1}{y} = \frac{3}{100}$, 求有序数对 (x, y) 的组数。A. 24 B. 25 C. 12 D. 13
29. 方程 $x^4 + 2x^3 + 2 = 0$ 的四根为 z_1, z_2, z_3, z_4 , 求 $(z_1z_2 + z_3z_4)(z_1z_4 + z_2z_3)(z_1z_3 + z_2z_4)$ 。A. -6
B. 8 C. 6 D. -8
30. $x \in \mathbb{R}, z \in \mathbb{C}$, z 的辐角为 $\frac{\pi}{4}$ 。求 $|x - z| + |2 + i - x| + |2 + i - z|$ 的最小值。A. $2\sqrt{2}$ B. 3
C. $\sqrt{10}$ D. $\sqrt{11}$
31. 直三棱柱 $ABC - A_1B_1C_1$ 中, $\angle ABC = 90^\circ$, $AB = 6$, $BC = BB_1 = 3\sqrt{2}$ (教学补订: 补充侧棱垂直底面)。动点 $P \in B_1C$, 判断 $A_1P + BP$ 的正确最值: A. 最小值 $\sqrt{3 + \sqrt{10}}$; B. 最小值 $3\sqrt{10}$; C. 最大值 $6 + 3\sqrt{2}$; D. 最大值 $9\sqrt{2}$ 。
32. 令 $z_k = \cos \frac{2k-2}{5}\pi + i \sin \frac{2k-2}{5}\pi$ ($k = 1, \dots, 5$), $a_i = \prod_{i \neq j} (z_i - z_j)$ 。判断: A. $a_1a_3a_4 = 125$; B. $a_1a_2a_3a_4a_5 = 5^5$; C. $a_2a_4^2 = 125$; D. $a_1 = 5$ 。
33. $f(x) = 9^x - 3^{x+1} + a$ 。判断: A. $f(x) < 0$ 对任意 $x \in (0, 1)$ 成立时 $a \in (-\infty, -3)$; B. 存在 $x \in (0, 1)$ 使 $f(x) < 0$ 时 $a \in (-\infty, 9/4)$; C. $f(x) = 3^xa$ 在 $[0, 1]$ 有唯一解时 $a \in (-\infty, 0]$; D. 该方程在 $[0, 1]$ 有解时 $a \in (-\infty, 0]$ 。
34. 求 $\min_{a, b \in \mathbb{R}} \max_{x \in [0, 4]} |(x-2)^3 + ax + b|$ 。A. 1 B. 2 C. $\frac{2\sqrt{3}}{27}$ D. $\frac{4\sqrt{3}}{27}$
35. 在 $\triangle ABC$ 中, 若 $\sin^2 A - \sin^2 C = \sin A \sin B - \sin^2 B$, 且 $c = 2$, 求三角形面积的最大值。(教学补订: 将不明的 $\sin 2C$ 订为 $\sin^2 C$ 。) A. $\sqrt{3}$ B. 2 C. $\sqrt{5}$ D. $2\sqrt{2}$