

2018 年清华大学领军计划测试

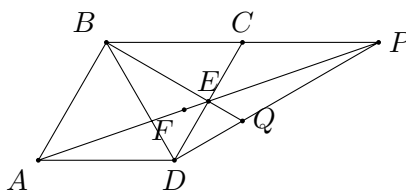
注：本试卷为回忆版本；保留有来源的选项，无选项题按填空题作答，第 29 题仅判断所列两个命题。

1. p, q, r 均为素数，且 $\frac{pqr}{p+q+r}$ 为整数，则 ()。A. p, q, r 中一定有一个是 2 B. 一定有一个是 3 C. 一定有两个数相等 D. $\frac{pqr}{p+q+r}$ 也为素数

2. a, b, c, d, e 均为素数，且平均数为 13，则 ()。A. 中位数最大为 17 B. 中位数最大为 19 C. 中位数最小为 5 D. 中位数最小为 7

3. 整数 x, y, z 满足 $|x| + |y| + |z| = 5$ ，这样的 (x, y, z) 有 () 组。A. 100 B. 101 C. 102 D. 103

4. 如图，在菱形 $ABCD$ 中， $\angle BAD = 60^\circ$ ， P 为 BC 延长线上一点， $AP \cap CD = E$ ， $BE \cap PD = Q$ ， AP 与 $\triangle ABD$ 的外接圆交于 F ，则 ()。A. E, F, D, Q 四点共圆 B. B, F, P, Q 四点共圆 C. B, F, C, E 四点共圆 D. C, P, F, D 四点共圆



5. P 为椭圆 $C_1: \frac{x^2}{4} + \frac{y^2}{3} = 1$ 上的动点，过 P 作 C_1 的切线，交圆 $C_2: x^2 + y^2 = 12$ 于 M, N ；过 M, N 作 C_2 的切线交于 Q ，则 ()。A. $S_{\triangle OPQ}$ 的最大值为 $\frac{\sqrt{3}}{2}$ B. 最大值为 $\frac{\sqrt{3}}{3}$ C. Q 的轨迹是 $\frac{x^2}{36} + \frac{y^2}{48} = 1$ D. Q 的轨迹是 $\frac{x^2}{48} + \frac{y^2}{36} = 1$

6. 实数 x, y, z 满足

$$\begin{cases} x + y - 2z + 1 = 0, \\ 4z^2 - xy - 14z + 14 = 0, \end{cases}$$

则 $x^2 + y^2$ ()。A. 最小值为 $\frac{32}{9}$ B. 最小值为 $\frac{64}{9}$ C. 最大值为 8 D. 最大值为 9

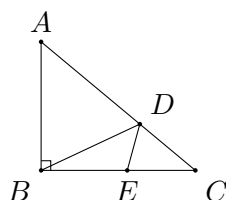
7. x, y, z 为正实数，求

$$\frac{xy^2z}{(x^2 + 2xy + 4y^2)(y^2 + 4yz + z^2)}$$

的最大值。A. $\frac{1}{36}$ B. $\frac{1}{32}$ C. $\frac{1}{18}$ D. $\frac{1}{16}$

8. 在长为 1 的线段上独立、均匀地选取两个点，将线段截成三段（补明随机模型）。
它们能构成三角形的概率为_____。
9. 7 个互不相等的素数排成一排，任意相邻的 3 个数之和均大于 100，问这 7 个素数之和的最小值。
10. 实数 a, b, c 满足 $a^2 + b^2 + c^2 = 1$ ，求 $a(a + b + c)$ 的最大值。
11. 如图，在直角三角形 ABC 中， $\angle ABC = 90^\circ$ ，斜边 AC 上有一点 D 使得 $AB = AD$ ， E 为 BC 上一点，使得 $\angle BAD = \angle BDE = \theta$ ，求

$$\lim_{\theta \rightarrow 0^+} \frac{BE}{BC}.$$



12. A, B 为两个随机事件， $P(A) > 0$ ， $0 < P(B) < 1$ 。问 $P(\bar{A} | B) = P(\bar{A} | \bar{B})$ 的充要条件。（补充条件以保证两条件概率均有定义。）
- A. $P(AB) = P(A)P(B)$
 B. $P(\bar{A} | B) = \frac{1}{2}$
 C. $P(\bar{A} | \bar{B}) = \frac{1}{2}$
 D. A, B 独立

13. 已知 a_k ($k = 1, 2, \dots, 7$) 为和为 1 的 7 个非负实数，记

$$M = \max\{a_1 + a_2 + a_3, a_2 + a_3 + a_4, a_3 + a_4 + a_5, a_4 + a_5 + a_6, a_5 + a_6 + a_7\},$$

求 M 的最小值。A. $\frac{3}{7}$ B. $\frac{1}{3}$ C. $\frac{1}{2}$ D. $\frac{2}{7}$

14. 记 $(1 + x + x^2)^{10} = a_0 + a_1x + a_2x^2 + \dots + a_{20}x^{20}$ ，求 $\sum_{k=0}^6 a_{3k}$ 。A. 2^9 B. 2^{19} C. 3^9 D. 3^{19}

15. 设 $f(x) = e^x(x-3)$, 过点 $(0, a)$ 可作 $f(x)$ 的三条切线, 则 (). A. $a > -e$ B. $a < -3$
C. $a < -3$ 或 $a > -e$ D. $-3 < a < -e$

16. 9 个人站成一排拍照, 从中任选 3 人, 求他们互不相邻的概率。A. $\frac{5}{12}$ B. $\frac{5}{7}$ C. $\frac{1}{12}$ D. $\frac{1}{7}$

17. 已知椭圆 $\frac{x^2}{4} + \frac{y^2}{3} = 1$ 和圆 $x^2 + (y-4)^2 = 1$ 上各有一动点 A, B , 求 $|AB|$ 的最大值。A. $2\sqrt{7}+1$
B. $5+\sqrt{3}$ C. $3\sqrt{3}+1$ D. $4\sqrt{2}+1$

18. 求 $[(1+\sqrt{3}\tan 10^\circ)\sin 10^\circ + 2\cos 40^\circ]\sqrt{1+\cos 20^\circ}$ 的值。A. $\sqrt{3}$ B. $\sqrt{2}$ C. $\frac{\sqrt{6}}{2}$ D. $\sqrt{6}$

19. 已知可行域

$$\begin{cases} x+y \leq 6, \\ x \geq 2, \\ ax+by+c \geq 0, \end{cases}$$

中 $z = 2x + y$ 的最大值为 11、最小值为 3, 求 $\frac{b+c}{a}$ 。A. 3 B. 5 C. -5 D. -3

20. 已知复数 x, y, z, w 满足 $|x|^2 + |y|^2 = 1$, $|z|^2 + |w|^2 = 1$, 且 $x\bar{z} + y\bar{w} = 0$, 则正确的是 ().
A. $|x| = |w|$ B. $|y| = |z|$ C. $\bar{x}w - \bar{y}z = 0$ D. $|xw - yz| = 1$

21. 英国、法国、意大利、巴西、西班牙和德国参加足球比赛。甲说:“意大利和西班牙肯定不是冠军”; 乙说:“冠军肯定出自法国或德国”; 丙说:“巴西肯定不是冠军”。已知三人中恰有两人正确、一人错误, 问冠军球队来自 (). A. 巴西 B. 德国或法国 C. 英国 D. 意大利或西班牙

22. 数列 $\{a_n\}$ 满足 $a_1 = 1$, $a_{n+1} = \frac{a_n}{(n-2)a_n + 2}$, 则正确的是 (). A. $a_9 = \frac{2}{9}$ B. $a_{10} = \frac{2}{503}$
C. $a_{n+1} \leq a_n$ D. $0 < a_n \leq 2$

23. A, B, C 为三角形的内角, 已知 $\tan A, \tan B, \tan C$ 均为整数, 问 $\tan A$ 的可能值。A. 4 B. 3
C. 2 D. 1

24. 数列 $\{a_n\}$ 满足 $a_1 = \frac{1}{2}$, $2na_{n+1} = (n+1)a_n$, 记 $S_n = \sum_{k=1}^n a_k$, 求 S_n 的表达式。A. $2 - \frac{n+2}{2^n}$
B. $1 - \frac{n+2}{2^{n+1}}$ C. $2 - \frac{n+2}{2^{n+1}}$ D. $2 - \frac{n+1}{2^n}$

25. 若参数 λ, M 使得

$$x_1^2 + x_2^2 + \lambda x_1 x_2 \geq M(x_1 + x_2)^2$$

对任意非负实数 x_1, x_2 恒成立, 则正确的是 ()。A. 若 $\lambda = 0$, 则 M 的最大值为 0 B. 若 $\lambda > 0$, 则 M 不存在最小值 C. “ M 的最大值为 1” 的充要条件是 “ $\lambda \geq 2$ ” D. 若 $\lambda = -6$, 则 M 的最小值为 -2

26. 有一个三棱锥, 其中一个面为边长为 2 的正三角形, 有两个面为等腰直角三角形, 则该几何体的体积可能为 ()。A. $\frac{\sqrt{3}}{3}$ B. $\frac{\sqrt{2}}{3}$ C. $\frac{2\sqrt{2}}{3}$ D. $\frac{2\sqrt{3}}{3}$

27. 复数 z 满足 $z^3 + z + 1 = 0$, 则正确的是 ()。A. $|z| > 1$ B. $|z| < 1$ C. $|z + \bar{z}| < 1$
D. $|z + \bar{z}| > \frac{1}{2}$

28. 向量 $\vec{a}, \vec{b}$ 的模长为正整数, 且 $(|\vec{a}| + |\vec{b}|)(|\vec{a}| + 3|\vec{b}|) = 105$, $(\vec{a} + \vec{b}) \cdot (\vec{a} + 3\vec{b}) = 33$, 则 ()。
A. $\langle \vec{a}, \vec{b} \rangle = 120^\circ$ B. $\langle \vec{a}, \vec{b} \rangle = 135^\circ$ C. $\vec{a} \cdot (\vec{a} + \vec{b}) = 3$ D. $\vec{b} \cdot (\vec{a} + \vec{b}) = 22$

29. 若函数 $f(x)$ 满足: 对任意三角形三边长 a, b, c , $f(a), f(b), f(c)$ 也能构成三角形三边长, 则称 f 具有性质 P 。则 ()。A. $f(x) = \sqrt{x}$ 具有性质 P B. $f(x) = x^2$ 不具有性质 P