

2018 年清华大学暑期学校测试

一、填空题

1. $1 + i + i^2 + \cdots + i^{2018} =$ _____。

2. 已知 $f(x) = x^t + 2 \int_0^1 f(x) dx$, 且 $\int_0^1 f(x) dx = -\frac{1}{4}$, 则 $t =$ _____。

3. 在 $\triangle ABC$ 中, 三边 a, b, c 成等比数列, 且 $a = 6$, $(a + b) \sin C = (a - c)(\sin A + \sin C)$, 则 $\sin A =$ _____。

4. 若 $f(x) = x^{2019} \log_{\sqrt{10}}(\sqrt{x^2 + 2A} + x)$ 是偶函数, 则 $A =$ _____。

5. 设 $f(x) = x(e^x - e^{-x})$ 。若

$$f(\log_{\sqrt{2}} m) + f\left(\log_{\frac{\sqrt{2}}{2}} m\right) \leq 2f(1),$$

则 m 的取值范围为_____。

6. 设 $|\vec{a}| = 2$, $|\vec{b}| = 1$, $\vec{a}$ 与 $\vec{b}$ 的夹角为 75° , 则 $|\vec{a} + 2\vec{b}|^2 =$ _____。

7. $(x + \frac{1}{x} + 1)^7$ 的展开式中常数项为_____。

8. 解方程 $3^x + 4^x = 5^x$ 时, 可化为 $(\frac{3}{5})^x + (\frac{4}{5})^x = 1$ 。注意函数 $(\frac{3}{5})^x + (\frac{4}{5})^x$ 单调递减, 且 $f(2) = 1$, 故原方程唯一解为 $x = 2$ 。仿照上述过程, 不等式

$$x^6 - 2x - 3 > -x^2 + (2x + 3)^3$$

的解集为_____。

9. 数列 $\{a_n\}$ 中, $a_{n+1}^2 + a_n^2 + 1 = 2(a_{n+1}a_n + a_{n+1} + a_n)$, $a_1 = 1$, $a_{n+1} > a_n$, 则 $a_n =$ _____。

10. 设 $\vec{a}, \vec{b}$ 为单位向量, $|\vec{c}| = \sqrt{26}$ 且 $\vec{a} \cdot \vec{c} = 1$, 则 $|\vec{a} \cdot \vec{b}| + |\vec{b} \cdot \vec{c}|$ 的最大值为_____。

二、解答题

11. 已知 $\sin \theta + \cos \theta = \frac{\sqrt{3}}{2}$, $\theta \in (0, \pi)$, 求 $\sin \theta - \cos \theta$ 及 $\sin^3 \theta - \cos^3 \theta$ 的值。

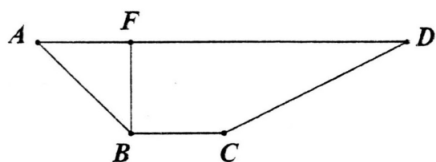
12. 已知数列 $\{a_n\}$ 满足 $a_1 = \frac{5}{3}$, $\frac{a_{n+1}}{a_n} = \frac{3}{1+4a_n}$ 。

(1) 证明 $\{\frac{1}{a_n} - 2\}$ 是等比数列；

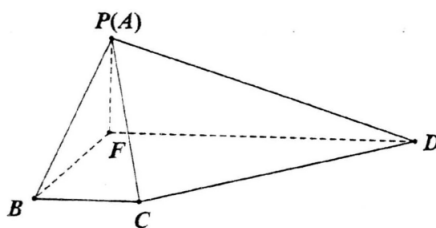
(2) 设 $T_n = \frac{1}{a_1} + \frac{1}{a_2} + \cdots + \frac{1}{a_n}$ 。若 $T_n < 2018$, 求 n 的最大值。

13. 52 张牌上分别标有 $1, 2, \dots, 52$ 。固定 A, D 为标号 $a, a+9$ 的两张牌 ($1 \leq a \leq 43$)，再从其余 50 张中等可能地取两张 B, C 。将四张牌中两张较小的分为一组、两张较大的分为一组，记 A, D 分在同组的概率为 $P(a)$ 。当 $P(a) \geq \frac{1}{2}$ 时，求 $P(a)$ 的最大值。(补明随机模型。)

14. 在图 1 中, A, F, D 依次共线, $BC \parallel AD$, $AF = BC = BF = 1$, $DF = 3AF$, $BF \perp AD$, $\angle A = 45^\circ$ 。现将 $\triangle ABF$ 沿边 BF 折叠, 使得 $PC = \sqrt{3}$ (P 是折叠后的 A 点), 如图 2。(依图补明平行关系, 折叠后原 AB 记为 PB 。)



(图 1)



(图 2)

(1) 在线段 PB 上是否存在 E , 使得 $DE \perp PC$?

(2) 在线段 PB 上取 E , 使得 $3PE = EB$, 求直线 PD 与平面 CDE 所成角的正弦值。

15. 过 $P(1,1)$ 作两条不重合的直线 l_1, l_2 , 与抛物线 $y^2 = 2px$ ($p > 0$) 分别交于 A, B 和 C, D , 且四点互异。证明: A, B, C, D 四点共圆, 当且仅当 l_1 与 l_2 的倾斜角互补。

16. 已知 $f(x) = x \cos x - \sin x + 1$ ($x > 0$)。

(1) 求 $f(x)$ 的单调区间；

(2) 记 x_i 是 $f(x)$ 从小到大的第 i 个零点 ($i \in \mathbb{Z}_+$)。

(i) 当 i 取 $1, 3, 5, \dots, 2k+1$ ($k \in \mathbb{N}$) 时, 证明

$$\frac{1}{x_1^2} + \frac{1}{x_3^2} + \cdots + \frac{1}{x_i^2} < \frac{9}{2\pi^2};$$

(ii) 证明

$$\frac{1}{x_1^2} + \frac{1}{x_2^2} + \cdots + \frac{1}{x_i^2} < \frac{23}{4\pi^2}.$$