

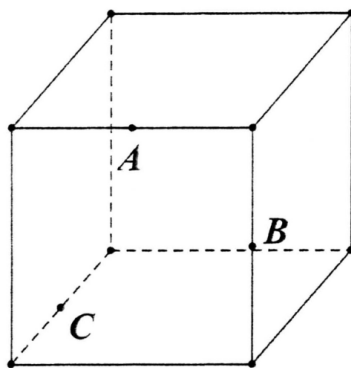
2018 年清华大学文科营测试

说明：本试卷为校订教学版，共 17 题。来源缺失第 14、15 题，现明确补入同层次教学题，不作为原题恢复。

1. 某摩天轮最低点离地面 2 m，半径为 10 m，匀速转一周需要 12 分钟。乘客在一周内离地面不低于 17 m 的时间为 ()。A. 2 分钟 B. 4 分钟 C. 6 分钟 D. 8 分钟

2. $\triangle ABC$ 的三边 a, b, c 成等差数列，所对的角分别为 A, B, C ，则 $\sin B + \cos B$ 的取值范围为 ()。
A. $(1, \sqrt{2}]$ B. $[\frac{1}{2}, \sqrt{2}]$ C. $(1, \frac{1}{2} + \sqrt{3}]$ D. $[\frac{1}{2}, \frac{1}{2} + \sqrt{5}]$

3. 如图，在正方体中， A, B, C 分别为三条棱的中点，则截面 ABC 是 () 边形。A. 3 B. 4 C. 5 D. 6



4. 数列 $\{a_n\}$ 满足 $a_1 = 2$ ， $a_{n+1} \leq \frac{1}{2}(a_n + a_{n+2})$ ，且 $a_{505} = 2018$ ，则 a_5 的最大值为 ()。

5. 将 $1, 2, \dots, 9$ 各一次填入 3×3 方格, 使每行从左到右递增、每列从上到下递增, 且 3, 4 的位置如图所示, 则填法共有 () 种。

3	4	

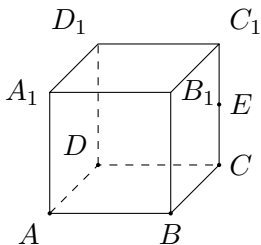
6. 定义 $[x]$ 为不超过 x 的最大整数, 则满足 $[x]^2 + [y]^2 = 50$ 的点 (x, y) 所组成图形的面积为 ()。

7. 在圆周上独立、均匀地取三个点, 它们构成锐角三角形的概率为 ()。

8. 二进制数 $(1010.11)_2$ 化为十进制数为 ()。

9. 函数 $f(x) = x^2 \ln x + x^2 - 2$ 的零点个数为_____。

10. $f(x)$ 为定义在实数集上的增函数, 且满足 $f(f(x) - 3^x) = 4$, 求 $f(2)$ 。
11. 半径为 1 的球面上有不共面的四点 A, B, C, D , 满足 $AD = BC = x$, $AC = BD = y$, $AB = CD = z$, 求 $x^2 + y^2 + z^2$ 的值。
12. 已知抛物线 $y = x^2$ 及其焦点 F , F 与 $Q(x, y)$ 连线段的中垂线为该抛物线的切线, 求点 Q 的轨迹方程。
13. 如图, 在棱长为 1 的正方体 $ABCD - A_1B_1C_1D_1$ 中, E 为 CC_1 的中点, P_1, P_2 为上顶面内两个不同点, 满足 $BP_1 \perp A_1E$, $BP_2 \perp A_1E$ 。
- (1) 判断 P_1P_2 与 BD 的位置关系;
 - (2) 若允许 P_1, P_2 在正方体的整个表面运动, 求 $|A_1P_1|$ 的最小值。



14. (教学补编, 原第 14 题缺失) 满足 $\frac{1}{x} + \frac{1}{y} = \frac{1}{12}$ 的正整数有序数对 (x, y) 有多少组?

15. (教学补编, 原第 15 题缺失) 将标有 $1, 2, \dots, 8$ 的八张卡片分别放入编号为 $1, 2, \dots, 8$ 的八个盒子, 每盒恰放一张, 且每张卡片的标号均不同于所在盒子的编号。共有多少种放法?

16. 函数 $f(x) = \frac{1}{2} + \lg \frac{x}{1-x}$, P 为函数曲线上横坐标为 $\frac{1}{2}$ 的定点, $A(x_1, y_1)$ 和 $B(x_2, y_2)$ 为函数曲线上的动点, 满足

$$2\overrightarrow{OP} = \overrightarrow{OA} + \overrightarrow{OB}.$$

(1) 直接写出 $f(x)$ 的定义域和单调区间;

(2) 对于任意 $A(x_1, y_1)$, 满足题意的 $B(x_2, y_2)$ 是否存在? 若存在, 结果是否唯一?

(3) 记

$$a_n = f\left(\frac{1}{n+1}\right) + \dots + f\left(\frac{n}{n+1}\right), \quad n \in \mathbb{N}^+,$$

$$b_n = 2018 \left(-\frac{1}{2}\right)^{2a_n}, \quad T_n = b_1 b_2 \cdots b_n, \quad \text{问 } T_n \text{ 何时取得最大值?}$$

17. 抛物线 $y^2 = 2px$ ($p > 0$) 的焦点为 F , 过抛物线外一点 $P(x_0, y_0)$ 作抛物线的两条切线 l_1, l_2 , 切点分别为 $M(x_1, y_1)$ 和 $N(x_2, y_2)$ 。

(1) 证明 l_1 的方程为 $y_1 y = p(x + x_1)$;

(2) 证明 $|PF|^2 = |MF| \cdot |NF|$;

(3) 证明 $\angle PMF = \angle FPN$ 。