

2018 年清华大学 4 月 28 日测试

一、阅读以下概念

我们利用邻域描述点和点集之间的关系。任意一点 $P \in \mathbb{R}^n$ 与任意点集 $E \subseteq \mathbb{R}^n$ 之间必有以下三种关系之一：

- (1) **内点**：如果存在点 P 的某个邻域 $U(P)$ ，使得 $U(P) \subseteq E$ ，那么称 P 为 E 的内点；
- (2) **外点**：如果存在点 P 的某个邻域 $U(P)$ ，使得 $U(P) \cap E = \emptyset$ ，那么称 P 为 E 的外点；
- (3) **边界点**：如果点 P 的任一邻域内既含有属于 E 的点，又含有不属于 E 的点，那么称 P 为 E 的边界点。 E 的边界点全体称为 E 的边界，记作 ∂E 。

任意一点 P 与点集 E 之间还有另一种关系：若对任意给定的 $\delta > 0$ ，点 P 的去心邻域 $U(P, \delta)$ 内总有 E 中的点，则称 P 是 E 的**聚点**。聚点 P 本身可以属于 E ，也可以不属于 E 。

例如，对平面点集 $E = \{(x, y) \mid 1 < x^2 + y^2 \leq 2\}$ ，满足 $1 < x^2 + y^2 < 2$ 的点都是内点；满足 $x^2 + y^2 = 1$ 或 $x^2 + y^2 = 2$ 的点都是边界点； E 及其边界上的点均为聚点。

若点集 E 中的点均为 E 的内点，则称 E 为**开集**；若 $\partial E \subseteq E$ ，则称 E 为**闭集**。集合 E 所有聚点的集合称为 E 的**导集**，记为 E' ； E 与 ∂E 的并集称为 E 的**闭包**，记为 $\bar{E}$ ，即 $\bar{E} = E \cup \partial E$ 。

二、判断并证明下列问题

1. $(E')' = E'$ 。
2. $((E')')' = (E')'$ 。
3. $\partial(\partial E) = \partial E$ 。
4. $\partial(\partial(\partial E)) = \partial(\partial E)$ 。
5. 若 $E \subseteq \mathbb{R}^n$ ，则 E 的边界点一定是 E 的聚点。
6. 若 E 为 $\mathbb{R}^n$ 中的开集，则 $F = \{(x_1, x_2, \dots, x_n, 0) \mid (x_1, x_2, \dots, x_n) \in E\}$ 为 $\mathbb{R}^{n+1}$ 中的开集。
7. 若 E 为 $\mathbb{R}^n$ 中的闭集，则上述 F 为 $\mathbb{R}^{n+1}$ 中的闭集。
8. 所有闭集的交集一定为闭集。
9. 所有闭集的并集一定为闭集。
10. 所有开集的交集一定为开集。
11. 所有开集的并集一定为开集。

12. 若 E 为 $\mathbb{R}^{n+1}$ 中的开集, 则 $F = \{(x_1, \dots, x_n) \mid (x_1, \dots, x_n, y) \in E\}$ 为 $\mathbb{R}^n$ 中的开集。
13. 若 E 为 $\mathbb{R}^{n+1}$ 中的闭集, 则上述 F 为 $\mathbb{R}^n$ 中的闭集。
14. E 为 $\mathbb{R}^2$ 的开集, 则 $F = \{(x_1, x_2, x_1 x_2) \mid (x_1, x_2) \in E\}$ 为 $\mathbb{R}^3$ 的开集。
15. E 为 $\mathbb{R}^2$ 的闭集, 则上述 F 为 $\mathbb{R}^3$ 的闭集。
16. E 为 $\mathbb{R}^2$ 的开集, 则 $F = \{(x_1, x_2, x_1 + x_2) \mid (x_1, x_2) \in E\}$ 为 $\mathbb{R}^3$ 的开集。
17. E 为 $\mathbb{R}^2$ 的闭集, 则上述 F 为 $\mathbb{R}^3$ 的闭集。
18. E, F 为 $\mathbb{R}^n$ 中的开集, 则 $W = \{(x_1 + y_1, \dots, x_n + y_n) \mid (x_1, \dots, x_n) \in E, (y_1, \dots, y_n) \in F\}$ 为 $\mathbb{R}^n$ 中的开集。
19. E, F 为 $\mathbb{R}^n$ 中的闭集, 则上述 W 为 $\mathbb{R}^n$ 中的闭集。
20. 存在 $F \subseteq \mathbb{R}^n$, F 为 F' 的真子集。
21. 存在 $F \subseteq \mathbb{R}^n$, F' 为 F 的真子集。
22. 给定一系列集合:

$$E_0 = [0, 1], \quad E_1 = \left[0, \frac{1}{3}\right] \cup \left[\frac{2}{3}, 1\right].$$

继续将每个子区间三等分并去掉正中间的三分之一, 得到

$$E_2 = \left[0, \frac{1}{9}\right] \cup \left[\frac{2}{9}, \frac{1}{3}\right] \cup \left[\frac{2}{3}, \frac{7}{9}\right] \cup \left[\frac{8}{9}, 1\right], \quad \dots$$

令 $E = \bigcap_{i=1}^{+\infty} E_i$. 判断并证明:

- (1) E 为闭集;
- (2) E 有内点;
- (3) 能否构造一个 E 与 $[0, 1]$ 的一一映射?