

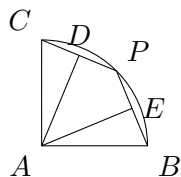
2017 年清华大学领军计划测试

注：2017 领军数学试题均为不定项选择，以下题目为回忆版本，部分问题选项缺失。等比数列采用各项非零的通常定义。

1. 已知复数 z_1, z_2 ，有 $|z_1 + z_2| = 1$ ， $|z_1^2 + z_2^2| = 4$ ，则 $|z_1 z_2|$ () A. 最大为 $\frac{5}{2}$ B. 最大为 $\frac{7}{4}$
C. 最小为 $\frac{3}{2}$ D. 最小为 $\frac{5}{4}$
2. 已知 $f(x) = x^2 + ax + b$ ，当 $x \in [-1, 1]$ 时， $|f(x)| \leq 2$ ，则 () A. $a \leq 2$ B. $a \geq -2$ C. $b \geq -1$
D. $b \leq 1$
3. $\triangle ABC$ 为等边三角形，边长为 3。平面外一点 P 满足 $PA = 3$ ， $PB = 4$ ， $PC = 5$ ，求 V_{P-ABC} 。
A. $\sqrt{11}$ B. $\sqrt{10}$ C. $\frac{\sqrt{5}}{2}$ D. $\frac{\sqrt{3}}{2}$
4. 有序四元组 (a_1, a_2, a_3, a_4) 中， $a_1, a_2, a_3, a_4 \in \{1, 2, \dots, 9\}$ 。记 $N(a_1, a_2, a_3, a_4)$ 表示其中不同数的个数，例如 $N(1, 1, 2, 2) = 2$ ， $N(1, 2, 3, 1) = 3$ ，则全部四元组的 N 的平均值为 () (校订：原选项均不匹配，将 A 改为正确值。) A. $\frac{2465}{729}$ B. $\frac{173}{64}$ C. $\frac{87}{32}$ D. $\frac{89}{32}$
5. 求 $x + 2y + 3z = 100$ 的非负整数解的组数。A. 884 B. 885 C. 886 D. 887
6. 已知 $x^2 + xy + y^2 = 1$ ，求 $(x + y)_{\max}$ 和 $x_{\max}$ 。A. $(x + y)_{\max} = \frac{2}{\sqrt{3}}$ B. $(x + y)_{\max} = 1$
C. $x_{\max} = \frac{2}{\sqrt{3}}$ D. $x_{\max} = 1$
7. $y = \frac{1}{2}x$ 交椭圆 $\frac{x^2}{8} + \frac{y^2}{2} = 1$ 于 A, B 。椭圆上有一点 $P \neq A, B$ ，直线 PA, PB 分别交 $y = -\frac{1}{2}x$ 于 C, D ，交点均存在，则 () A. 椭圆上一点 Q ，使得 $|OQ|^2 = |OD| \cdot |OC|$ 的 Q 有且仅有 4 个
B. 有且仅有 2 个 C. y 轴上一点 Q' ，使 $\angle OQ'C = \angle ODQ'$ 的 Q' 有且仅有 2 个 D. 有且仅有 4 个

8. 已知椭圆 $\frac{x^2}{4} + y^2 = 1$, P 是右准线上一点, PA, PB 与椭圆相切于 A, B . F_1 为椭圆左焦点, 则下列选项正确的是 () A. $|AB|_{\min} = 1$ B. $|AB|_{\min} = \frac{1}{2}$ C. $\triangle F_1AB$ 的周长为定值 D. $\triangle F_1AB$ 的面积为定值
9. $\triangle ABC$ 中, 求 $\sin A + \sin B \sin C$ 的最大值 () A. $\frac{3}{2}$ B. 不存在 C. $\frac{\sqrt{5}+1}{2}$ D. $\frac{3+2\sqrt{3}}{4}$
10. 已知多项式 $x^4 - 2x^3 + (m+2)x^2 - (4m+2)x + 4m+1 \geq 0$ 恒成立, 求 m 的取值范围 ()
A. $[0, +\infty)$ B. $(-\infty, 0]$ C. $\left[\frac{1}{2}, 1\right]$ D. $\left[\frac{1}{2}, +\infty\right)$
11. 已知 $|z_1| = 2$, $|z_2| = 1$, 求 $z_1 - z_2$ 与 z_1 夹角的最大值。 A. $\frac{\pi}{6}$ B. $\frac{\pi}{3}$ C. $\frac{\pi}{4}$ D. $\frac{\pi}{2}$
12. 已知 $A = \{-1, 0, 1\}$, $B = \{2, 3, 4, 5, 6\}$. f 是一个从 A 到 B 的映射, 则满足对任意 $x \in A$, $x + f(x) + xf(x)$ 为奇数的映射 f 的种数为 () A. 40 B. 50 C. 60 D. 70
13. 在等腰 $\triangle ABC$ 中, $AB = AC$, 点 D, E, F 均在线段 BC 上, 且 $\frac{1}{8}BC = \frac{1}{4}BD = \frac{1}{2}BE = BF$, 试比较 $\overrightarrow{DB} \cdot \overrightarrow{DA}$, $\overrightarrow{EB} \cdot \overrightarrow{EA}$, $\overrightarrow{FB} \cdot \overrightarrow{FA}$ 的大小关系。

14. 以 A 为圆心, 有一半径为 1 的四分之一圆弧 BC , 点 P 在该弧上且异于端点。连接 PB, PC , $AD \perp PC$ 于 D , $AE \perp PB$ 于 E 。求四边形 $ADPE$ 的面积的最大值 () A. $\frac{\sqrt{2}}{2}$ B. $\sqrt{2}$
C. $\frac{\sqrt{3}}{3}$ D. $\frac{\sqrt{2}}{4}$



15. 已知 $f(x) = x^2 + ax + b$ 在 $x \in (-1, 1)$ 上有两个零点。求 $a^2 - 2b$ 的取值范围。A. $(0, +\infty)$
B. $(0, 2)$ C. $(-\infty, 2)$ D. $(-2, 2)$

16. 小赵、小钱、小孙、小李每人去 A, B, C, D 四地之一, 去的地方各不相同。小赵: “我去 A 地”; 小钱: “我去 B 或 C 或 D 地”; 小孙: “我去 C 地”; 小李: “我去 D 地”。只有一个人说错了, 可能是谁? A. 小赵 B. 小钱 C. 小孙 D. 小李

17. $f(x) = e^x(x-1)^2(x-2)$, 则 () A. $x = 1$ 是极大值点 B. $x = 1$ 是极小值点 C. 有 2 个极大值点 D. 有 2 个极小值点

18. 已知 $z = \cos \frac{2\pi}{5} + i \sin \frac{2\pi}{5}$, $P(x) = x^2 + x + 2$, 求 $P(z)P(z^2)P(z^3)P(z^4)$ 。(校订: 原选项均不匹配, 将 A 改为正确值。) A. 11 B. 12 C. 10 D. 8

19. 求 $x \geq 0, y \geq 0, z \geq 0, x + 2y + 3z \leq 1$ 的体积。A. $\frac{1}{36}$ B. $\frac{1}{18}$ C. $\frac{1}{9}$ D. $\frac{1}{72}$

20. 设 $a, b > 0$ 且满足 $a^2 + a = 3b^2 + 2b$, 则下列说法中正确的有 () A. $a > 2b$ B. $a < 2b$
C. $a > b$ D. $a < b$

21. 方程 $(3x + y)^5 + x^5 + 4x + y = 0$ 的实数解 (x, y) () A. 在一条直线上 B. 在一条抛物线上
C. 只有有限个 D. 有无穷多个

22. 已知数列 $\{x_n\}, \{y_n\}, \{z_n\}$ 满足

$$x_{n+1} = \frac{1}{2}(y_n + z_n - x_n), \quad y_{n+1} = \frac{1}{2}(x_n + z_n - y_n), \quad z_{n+1} = \frac{1}{2}(x_n + y_n - z_n).$$

- 则下列说法正确的是 () A. 数列 $\{x_n + y_n + z_n\}$ 一定是等比数列 B. 若存在 $m \in \mathbb{Z}^+$, 使得 $x_m = y_m = z_m$, 则 $x_1 = y_1 = z_1$ C. 若对任意 n 均有 $x_n > 0$, 则 $x_1 = y_1 = z_1$ D. 以上都不对

23. $\{a_1, a_2, \dots, a_6\}$ 是集合 $\{1, 2, \dots, 6\}$ 的一个排列, 且

$$a_1 - 5a_2 + 10a_3 - 10a_4 + 5a_5 - a_6 = 0,$$

- 则这样的排列有 () 个。A. 5 B. 6 C. 8 D. 7

24. 已知正实数 x, y, z, w 满足 (教学改编: 原稿缺少正数条件, 商可能无定义或无最小值)

$$x + 2w - z - 2y = 0, \quad 2zy = xw, \quad z \geq y,$$

- 则 $\frac{z}{y}$ 的最小值为 ()。A. $6 + \sqrt{2}$ B. $6 + 4\sqrt{2}$ C. $6 + 3\sqrt{2}$ D. $6 + 2\sqrt{2}$

25. 已知 $f(x) = e^{2x} + e^x - ax$ 。若对任意 $x \geq 0$, 恒有 $f(x) \geq 2$, 则 $a \in$ ()。A. $(-\infty, 3]$ B. $[3, +\infty)$
C. $(-\infty, \frac{1}{2}]$ D. $[\frac{1}{2}, +\infty)$