

2017 年清华大学暑期学校测试

一、填空题 (每小题 8 分)

1. 已知函数 $f(x) = \frac{ax}{x^2 + c} + b$, $g(x) = [f(x)]^2 - 1$, 其中 a, b, c 为已知参数, 且 $a \neq 0, c > 0$ 。判断下列说法中正确的有 ()。

- (1) 函数 $f(x)$ 的图象关于点 $(0, b)$ 中心对称;
- (2) 函数 $f(x)$ 在 $(0, +\infty)$ 上可能是单调递增函数;
- (3) 函数 $f(x)$ 是有界函数;
- (4) 方程 $g(x) = 0$ 的根可能为 $\{-1, 1, -2, 2\}$ 。

2. 无穷数列 $\{a_n\}$ 满足 $a_{n+1} = \frac{a_n}{a_n + 1}$, 则 a_1 的取值范围为_____。

3. 已知 $f(x) = x^2 - 2x - a^2 + 1$ 。若存在 x_0 , 使得

$$[x_0, x_0 + 2] \subseteq \{x \mid f(x) \leq 0\},$$

则 a 的取值范围为_____。

4. 有 $1, 2, \dots, 2017$ 共 2017 个数。每次任取三个数 a, b, c 擦去, 并写上 $a + b + c$ 除以 11 的余数。如此继续, 直到黑板上只剩一个数, 则最后这个数可能的取值为_____。

5. 双曲线 $\frac{x^2}{a^2} - \frac{y^2}{b^2} = 1$ 的右焦点为 F_2 。若左支上存在一点 P , 使线段 F_2P 的中点 M 满足 $|OM| = \frac{c}{8}$, 则该双曲线离心率 e 的取值范围为_____。

6. 曲线 $\sqrt{x^2 + (y-1)^2} \sqrt{x^2 + (y+1)^2} = 3$ 。判断下列说法中正确的有 ()。

(1) 曲线经过点 $(0, 0)$;

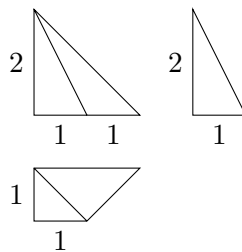
(2) 曲线上点的纵坐标取值范围为 $[-2, 2]$;

(3) 曲线关于 x 轴对称;

(4) 点 P 在曲线上运动, $A = (0, 1), B = (0, -1)$, 则 $\triangle PAB$ 面积的最大值为 $\frac{3}{2}$ 。

7. 已知球的直径 $SC = 4$, 点 A, B 在球面上, $|AB| = \sqrt{3}$, 且 $\angle ASC = \angle BSC = 30^\circ$, 求四面体 $S - ABC$ 的体积。

8. 某四棱锥的三视图如图所示 (左上、右上、左下依次为正、侧、俯视图), 则它的四个侧面中, 直角三角形共有_____ 个。



9. 一个三角形的三边长均为正整数, 记为 a, b, c , 且 $a \leq b \leq c$ 。若 $b = 10$, 则不同的有序数组 (a, b, c) 共有_____ 个。

10. 在 4×4 方格中填入 8 个 1 (其余格填 0), 使得每行及每列均恰有两个 1, 共有_____种填法。

二、解答题

11. 在 $\triangle ABC$ 中, 三边长分别为 a, b, c , 面积为 S , 且

$$\frac{\sqrt{3}}{12}(a^2 + b^2 - c^2) = S.$$

若 $c = 1$, 求 $\sqrt{3}b - a$ 的最大值。

12. 独立重复抛掷一枚质地均匀的硬币, 直到累计出现两次正面时停止。求抛掷总次数的数学期望。

13. 已知圆 $C_1: x^2 + y^2 = 5$, 椭圆 $C_2: \frac{x^2}{4} + y^2 = 1$ 。证明: 对于圆 C_1 的任意一条直径 AB , 总存在圆 C_1 上一点 P , 使得 PA, PB 均与椭圆 C_2 相切。

14. 设 $A_0 = O$, 对 $n \geq 1$ 有 $\overrightarrow{OA_n} = \overrightarrow{OA_{n-1}} + (x_n, y_n)$, 其中 x_n, y_n 为整数, 且 $|x_n| + |y_n| = 3$ 。(校订: 补明原稿缺失的初始点。)

(1) 求 $|\overrightarrow{OA_3}|$ 的最大值;

(2) 求 $|\overrightarrow{OA_{2017}}|$ 的最小值。

15. 已知罗尔定理：若函数 $f(x)$ 在闭区间 $[a, b]$ 上连续、在开区间 (a, b) 内可导，且 $f(a) = f(b)$ ，则存在 $c \in (a, b)$ ，使得 $f'(c) = 0$ 。

(1) 证明拉格朗日中值定理；

(2) 设函数 f 的定义域和值域均为 $[0, 1]$ ，且 $f(0) = 0, f(1) = 1$ ， f 在 $[0, 1]$ 上连续、在 $(0, 1)$ 内可导。证明：对任意正整数 n ，均存在互不相同的 $x_1, x_2, \dots, x_n \in (0, 1)$ ，使得

$$f'(x_1) + f'(x_2) + \cdots + f'(x_n) = n.$$

16. 记 $|A|$ 为有限实数集 A 的元素个数，定义 $A + B = \{a + b \mid a \in A, b \in B\}$ 。若

$$|A + A| = \frac{1}{2}|A|(|A| + 1),$$

则称集合 A 具有性质 T 。

(1) 设 $A = \{a_1, a_2, \dots, a_n\}$ ，其中数列 $\{a_n\}$ 为正有理数等比数列。证明 A 具有性质 T ；

(2) 若集合 A, B 均具有性质 T ，且 $|A| = |B| = n$ ，求 $|A + B|$ 的最小值。