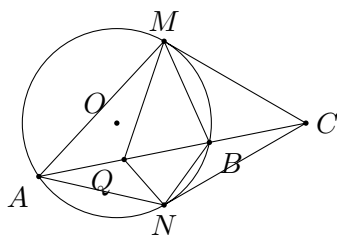


2017 年清华大学文科营测试

1. 在圆周的十等分点 $A_1, A_2, \dots, A_{10}$ 中取出四个点, 可以围成的梯形 (恰有一组对边平行, 不含平行四边形) 个数是_____。

2. 如图, 过圆 O 外一点 C 作圆 O 的两条切线, 切点分别为 M, N ; 过点 C 作圆 O 的割线交圆于 A, B 两点。线段 AB 上一点 Q 满足 $\angle AMQ = \angle CNB$, 则下列结论正确的是 () A. $\triangle AMQ$ 与 $\triangle MBC$ 相似 B. $\triangle AQM$ 与 $\triangle NBM$ 相似 C. $\triangle AMN$ 与 $\triangle BQM$ 相似 D. $\triangle AMN$ 与 $\triangle BNQ$ 相似



3. 已知方程 $kx = \sin x$ 在区间 $(-3\pi, 3\pi)$ 内有五个实数解 $x_1 < x_2 < x_3 < x_4 < x_5$, 则 ()
A. $x_5 = \tan x_5$ B. $\frac{29}{12}\pi < x_5 < \frac{5}{2}\pi$ C. x_2, x_4, x_5 成等差数列 D. $x_1 + x_2 + x_3 + x_4 + x_5 = 0$

4. 已知函数 $f(x) = \begin{cases} x, & x \geq a, \\ 4x^3 - 3x, & x < a, \end{cases}$ 则 () A. 若 $f(x)$ 有两个极值点, 则 $a = 0$ 或 $\frac{1}{2} < a < 1$
B. 若 $f(x)$ 有极小值点, 则 $a > \frac{1}{2}$ C. 若 $f(x)$ 有极大值点, 则 $a > -\frac{1}{2}$ D. 使 $f(x)$ 连续的 a 有 3 个取值

5. 空间直角坐标系 $O-xyz$ 中, 满足 $0 \leq x \leq y \leq z \leq 1$ 的点 (x, y, z) 围成的体积是_____。

6. 圆 O 半径为 3, 一条弦 $AB = 4$, P 为圆 O 上任意一点, 则 $\overrightarrow{AB} \cdot \overrightarrow{BP}$ 的最大值是_____。

7. 集合 $A = \{1, 2, 3, 4, 5, 6, 7, 8, 9, 10\}$, 从中取出三个元素构成 A 的子集, 且所取的三个数互不相邻, 这样的子集个数为_____。

8. 已知 z 为实部、虚部均为正整数的复数, 则 () A. $2 \mid \operatorname{Re}(z^2 - z)$ B. $3 \mid \operatorname{Re}(z^3 - z)$
C. $4 \mid \operatorname{Re}(z^4 - z)$ D. $5 \mid \operatorname{Re}(z^5 - z)$

9. 椭圆 $\frac{x^2}{a^2} + \frac{y^2}{b^2} = 1$ ($a > b > 0$), 直线 $l_1: y = -\frac{1}{2}x$, 直线 $l_2: y = \frac{1}{2}x$. P 为椭圆上任意一点, 过点 P 作 $PM \parallel l_1$ 且与 l_2 交于点 M ; 作 $PN \parallel l_2$ 且与 l_1 交于点 N . 若 $|PM|^2 + |PN|^2$ 为定值, 则 () A. $ab = 2$ B. $ab = 3$ C. $\frac{a}{b} = 2$ D. $\frac{a}{b} = 3$
10. 已知 z_1, z_2 为实部、虚部都为正整数的复数, 则 $\frac{|z_1 + z_2|}{\sqrt{|z_1 z_2|}}$ () A. 有最大值 2 B. 无最大值 C. 有最小值 $\sqrt{2}$ D. 无最小值
11. 已知函数 $f(x) = \sin x \sin 2x$, 则 () A. $f(x)$ 有对称轴 B. $f(x)$ 有对称中心 C. $f(x) = a$ 在 $(0, 2\pi)$ 上的解为偶数个 D. $f(x) = \frac{7}{9}$ 有解
12. 已知实数 x, y 满足 $5x^2 - y^2 - 4xy = 5$, 求 $2x^2 + y^2$ 的最小值。
13. 已知 $\triangle ABC$ 的三个内角 A, B, C 所对的边分别为 a, b, c , 且满足 $b \cos C + (a+c)(b \sin C - 1) = 0$, $a+c = \sqrt{3}$, 则 $\triangle ABC$ () A. 面积的最大值为 $\frac{3\sqrt{3}}{16}$ B. 周长的最大值为 $\frac{3\sqrt{3}}{2}$ C. $B = \frac{\pi}{3}$ D. $B = \frac{\pi}{4}$
14. 两个半径为 1 的球, 球心之间的距离为 d , 包含两个球的最小球的体积为 V , 求 $\lim_{d \rightarrow +\infty} \frac{V}{d^3}$ 。
15. 椭圆 $\frac{x^2}{4} + \frac{y^2}{9} = 1$ 与过原点且互相垂直的两条线的四个交点围成的四边形面积可能是 () A. 16 B. 12 C. 10 D. 18
16. $a_1, a_2, \dots, a_8$ 为 $1, 2, 3, 4, 5, 6, 7, 8$ 的一个排列, 且满足 $a_1 + a_3 + a_5 + a_7 = a_2 + a_4 + a_6 + a_8$, 求这样的排列个数。
17. 甲乙丙丁四个人背后的号码为 $1, 2, 3, 4$, 各用一次。赵同学说: 甲是 2 号, 乙是 3 号; 钱同学说: 丙是 2 号, 乙是 4 号; 孙同学说: 丁是 2 号, 丙是 3 号; 李同学说: 丁是 1 号, 乙是 3 号。他们每个人都对了一半, 问丙是几号。
18. 已知函数 $f(x) = \frac{\sin^3 x + 2 \cos^3 x}{2 \sin^2 x + \cos^2 x}$, 若 $n \in \mathbb{N}^*$, 则 $\int_0^{2n\pi} f(x) dx$ 的值为 () A. 与 n 有关 B. 0 C. 1 D. 2
19. 求函数 $f(x) = \left\lfloor \frac{2}{x} \right\rfloor - 2 \left\lfloor \frac{1}{x} \right\rfloor$ 的值域。

20. 求满足 $m \mid 2016$, $n \mid 2016$, 而 $mn \nmid 2016$ 的正整数有序数对 (m, n) 的个数。
21. 正方形 $ABCD$ 所在的平面内有一点 O , 满足 $\triangle OAB, \triangle OBC, \triangle OCD, \triangle ODA$ 为等腰三角形, 则满足条件的 O 一共有多少个?
22. 已知所有元素均为非负实数的集合 A 满足: 对任意 $a_i, a_j \in A$ (允许相等), $a_i \geq a_j$, 均有 $a_i + a_j \in A$ 或 $a_i - a_j \in A$, 且 A 中任意三个互异元素的任意排列均不构成等差数列, 则集合 A 的元素个数可能为 () A. 3 B. 4 C. 5 D. 6
23. 已知关于 z 的方程 $z^{2017} - 1 = 0$ 的所有复数解为 z_i ($i = 1, 2, \dots, 2017$), 则 $\sum_{i=1}^{2017} \frac{1}{2 - z_i}$ ()
A. 是比 $\frac{2017}{2}$ 大的实数 B. 是比 $\frac{2017}{2}$ 小的实数 C. 是有理数 D. 不是有理数
24. 已知复数 x, y 满足 $x + y = x^4 + y^4 = 1$, 则 xy 的不同取值有多少种?
25. 已知函数 f 满足 $f(m+1, n+1) = f(m, n) + f(m+1, n) + n$, $f(m, 1) = 1$, $f(1, n) = n$, 其中 $m, n \in \mathbb{N}^*$, 则 () A. 使 $f(2, n) \geq 100$ 的 n 的最小值是 11 B. 使 $f(2, n) \geq 100$ 的 n 的最小值是 13 C. 使 $f(3, n) \geq 100$ 的 n 的最小值是 19 D. 使 $f(3, n) \geq 100$ 的 n 的最小值是 20
26. 已知 $f(x)$ 是 $(0, +\infty)$ 上连续的有界函数, 定义 $g(x) = \sup_{0 < t \leq x} f(t)$, 其中 t 取实数。以下结论正确的有 () (教学补订: 原稿的最大值未必存在, 改为上确界; 明确使用非严格单调。) A. $g(x)$ 是有界函数 B. $g(x)$ 是连续函数 C. $g(x)$ 是单调不减函数 D. $g(x)$ 不是单调不减函数
27. 已知对任意实数 x , 均有 $a \cos x + b \cos 3x \leq 1$, 则 () A. $|a - 2b| \leq 2$ B. $|a + b| \leq 1$
C. $|a - b| \leq \sqrt{2}$
D. $|a + 2b| \leq 2$

28. 5 个人中每两人之间比赛一场，每场必分胜负。若第 i 个人胜 x_i ($i = 1, 2, 3, 4, 5$) 场、负 y_i ($i = 1, 2, 3, 4, 5$) 场，则 () A. $x_1 + x_2 + x_3 + x_4 + x_5$ 为定值 B. $y_1 + y_2 + y_3 + y_4 + y_5$ 为定值 C. $x_1^2 + x_2^2 + x_3^2 + x_4^2 + x_5^2$ 为定值 D. $y_1^2 + y_2^2 + y_3^2 + y_4^2 + y_5^2$ 为定值

29. 若存在满足下列三个条件的集合 A, B, C ，则称偶数 n 为“萌数”：

(a) A, B, C 为集合 $M = \{1, 2, \dots, n\}$ 的 3 个非空子集，且两两交集为空， $A \cup B \cup C = M$ ；

(b) A 中所有数为奇数， B 中所有数为偶数，所有 3 的倍数都在 C 中；

(c) 集合 A, B, C 中所有数的和分别记为 S_1, S_2, S_3 ，且 $S_1 = S_2 = S_3$ 。

下列说法正确的是 () A. 8 是“萌数” B. 60 是“萌数” C. 68 是“萌数” D. 80 是“萌数”

30. 已知非零实数 a, b, c, A, B, C ，则“ $ax^2 + bx + c \geq 0$ 与 $Ax^2 + Bx + C \geq 0$ 解集相同”是“ $\frac{a}{A} = \frac{b}{B} = \frac{c}{C}$ ”的 () A. 充分非必要条件 B. 必要非充分条件 C. 充要条件 D. 既非充分也非必要条件

31. 一个人每次投篮独立，命中率为 $\frac{2}{3}$ ，直到连续投进两个才停止，则他停止时恰投 4 次的概率为_____。

32. 已知 $0 < P(A) < 1$ ， $0 < P(B) < 1$ ， $P(A | B) = 1$ ，则 () A. $P(\bar{A} | \bar{B}) = 0$ B. $P(\bar{B} | \bar{A}) = 1$ C. $P(A \cup B) = P(A)$ D. $P(\bar{B} | A) = 1$

33. 已知实数 x, y 满足

$$\begin{cases} (x-1)(y^2+6) = x(y^2+1), \\ (y-1)(x^2+6) = y(x^2+1), \end{cases}$$

则 () A. $\left(x - \frac{5}{2}\right)^2 + \left(y - \frac{5}{2}\right)^2 = \frac{1}{2}$ B. $x = y$ C. 有 3 组解 (x, y) D. 有 4 组解 (x, y)

34. 在 $\triangle ABC$ 中， $\sin^2 A = \sin^2 B + \sin B \sin C$ ，求 $A - 2B$ 。

35. 已知 $Q(x) = a_{2017}x^{2017} + a_{2016}x^{2016} + \dots + a_1x + a_0$ ，对任意正实数 x 均有 $Q(x) > 0$ 。若 $a_i \in \{-1, 1\}$ ($i = 0, 1, 2, \dots, 2017$)，则 $a_0, a_1, a_2, \dots, a_{2017}$ 中取值为 -1 的项最多有多少个？