

2017 年清华大学 4.29 测试

本卷为不定项选择题，每题可能有一个或多个正确选项。第 11、14、20 题按教学使用补全条件，详见校对记录。

- $a_1, a_2, \dots, a_9$ 是数字 1-9 的一个排列，求 $a_1a_2a_3 + a_4a_5a_6 + a_7a_8a_9$ 的最小值。A. 213 B. 214
C. 215 D. 216
- 设 $(x^2 - x + 1)^{1008} = a_0 + a_1x + a_2x^2 + \dots + a_{2016}x^{2016}$ ，则 $a_0 + 2a_1 + 3a_2 + \dots + 2017a_{2016}$ 的值是 () A. 1008 B. 1009 C. 2016 D. 2017
- $S = \{1, 2, \dots, 25\}$ ， $A \subseteq S$ ，且 A 的所有子集中元素之和不同。则下列选项正确的有 ()
A. $|A|_{\max} = 6$
B. $|A|_{\max} = 7$
C. 若 $A = \{a_1, a_2, a_3, a_4, a_5\}$ ，则 $\sum_{i=1}^5 \frac{1}{a_i} < \frac{3}{2}$
D. 若 $A = \{a_1, a_2, a_3, a_4, a_5\}$ ，则 $\sum_{i=1}^5 \frac{1}{a_i} < 2$
- 椭圆 $\frac{x^2}{4} + \frac{y^2}{3} = 1$ 的左、右焦点分别为 F_1, F_2 。过 F_2 作一条直线交椭圆于 A, B ，且 F_1, A, B 不共线，则三角形 F_1AB 的内切圆面积可能是 () A. 1 B. 2 C. 3 D. 4
- $\{a_n\}$ 、 $\{b_n\}$ 均为等差数列，已知 $a_1b_1 = 135$ ， $a_2b_2 = 304$ ， $a_3b_3 = 529$ ，则下列是 $\{a_nb_n\}$ 中的项的有 () A. 810 B. 1147 C. 1540 D. 3672
- 已知函数 $y = x + \frac{t}{x}$ ($t \in \mathbb{R}$)，过 $P(1, 0)$ 作两条不同的切线，切点分别为 M, N ，记 $|MN| = g(t)$ ，则下列说法中正确的有 () A. $t = \frac{1}{4}$ 时， $PM \perp PN$ B. $g(t)$ 在定义域内单调递增 C. $t = \frac{1}{2}$ 时， M, N 和 $(0, 1)$ 共线 D. $g(1) = 6$
- 已知数列 $\{x_n\}$ ，其中 $x_1 = a$ ， $x_2 = b$ ， $x_{n+1} = x_n + x_{n-1}$ (a, b 是正整数)，若 2008 为数列中的某一项，求 $a + b$ 可能的取值。A. 8 B. 9 C. 10 D. 11

8. 独立掷一枚均匀六面骰子六次, 存在 $k \in \{1, \dots, 6\}$ 使得第 $1-k$ 次的点数之和为 6 的概率是 p , 求 p 的取值范围. A. $0 < p < 0.25$ B. $0.25 < p < 0.5$ C. $0.5 < p < 0.75$ D. $0.75 < p < 1$
9. $\triangle ABC$ 中, $AB = 2$, $AC = 3$, $BC = 4$, O 为三角形内心. 若 $\overrightarrow{AO} = \lambda \overrightarrow{AB} + \mu \overrightarrow{BC}$, 求 $3\lambda + 6\mu$.
A. 1 B. 2 C. 3 D. 4
10. 甲乙丙丁四人做相互传球游戏, 每次持球者独立、等概率地传给其他三人中的一人. 从甲持球开始, 共传球 4 次, 则第四次球传回甲的概率是 () A. $\frac{7}{27}$ B. $\frac{5}{27}$ C. $\frac{7}{8}$ D. $\frac{21}{64}$
11. 【教学补订】椭圆 $\frac{x^2}{a^2} + \frac{y^2}{b^2} = 1$ ($a > b > 0$) 的中心为原点 O , 离心率 $e \in \left[\frac{1}{\sqrt{3}}, \frac{1}{\sqrt{2}}\right]$. 直线 $y = -x + 1$ 交椭圆于 M, N , 且 $OM \perp ON$, 求长轴长的取值范围. A. $[\sqrt{5}, \sqrt{6}]$ B. $[\sqrt{6}, \sqrt{7}]$
C. $[\sqrt{7}, \sqrt{8}]$ D. $[\sqrt{8}, \sqrt{9}]$
12. 直角 $\triangle ABC$ 中, 以直角边 AB 、斜边 BC 为其中一边分别向三角形所在一侧作正方形 $ABDE$ 和 $BCFG$, 求 $\overrightarrow{GA}$ 和 $\overrightarrow{DC}$ 的夹角. A. 45° B. 60° C. 90° D. 120°
13. 正方体 $ABCD - A_1B_1C_1D_1$ 的边长为 1, 底面中心为 O , A_1D_1 中点为 M , CC_1 中点为 N , 求四面体 $O - MB_1N$ 的体积. A. $\frac{7}{24}$ B. $\frac{7}{48}$ C. $\frac{5}{24}$ D. $\frac{5}{48}$
14. 【教学补订】设 $a, b, c > 0$, 求 $\frac{a}{b+3c} + \frac{b}{8c+4a} + \frac{9c}{3a+2b}$ 的最小值. A. $\frac{47}{48}$ B. 1 C. $\frac{35}{36}$ D. $\frac{3}{4}$

15. $\triangle ABC$ 中, $\angle A = 60^\circ$, $\angle B = 45^\circ$, $\angle A$ 的角平分线长度为 2, $CH \perp AB$ 于 H 。则下列正确的是 () A. $CH = \sqrt{3}$ B. $AB = \sqrt{3} + 1$ C. $BC = \sqrt{6}$ D. $S_{\triangle ABC} = 3$

16. $0 < x < \frac{\pi}{2}$, 则下列方程有解的是 ()

A. $\cos(\cos x) = \sin(\sin x)$

B. $\sin(\cos x) = \cos(\sin x)$

C. $\tan(\tan x) = \sin(\sin x)$

D. $\tan(\sin x) = \sin(\tan x)$

17. 已知 $0 < x < 1$, 则下列正确的是 ()

A. $\frac{\sin x}{x} < \left(\frac{\sin x}{x}\right)^2 < \frac{\sin x^2}{x^2}$

B. $\left(\frac{\sin x}{x}\right)^2 < \frac{\sin x}{x} < \frac{\sin x^2}{x^2}$

C. $\left(\frac{\sin x}{x}\right)^2 < \frac{\sin x^2}{x^2} < \frac{\sin x}{x}$

D. $\frac{\sin x^2}{x^2} < \left(\frac{\sin x}{x}\right)^2 < \frac{\sin x}{x}$

18. 已知 $z_1 = \sin \alpha + 2i$, $z_2 = 1 + i \cos \alpha$, 求 $\frac{|13 - |z_1 + iz_2|^2|}{|z_1 - iz_2|}$ 的最小值。A. $\frac{1}{2}$ B. 2 C. $\frac{4}{3}$ D. $\frac{3}{2}$

19. 在空间中过点 A 作平面 π 的垂线, 垂足为 B , 记 $B = f_\pi(A)$ 。设 α, β 是两个不同的平面。对空间中任意一点 P , $Q_1 = f_\beta[f_\alpha(P)]$, $Q_2 = f_\alpha[f_\beta(P)]$, 恒有 $PQ_1 = PQ_2$, 则 () A. $\alpha \perp \beta$
B. α 与 β 的锐二面角为 45° C. $\alpha \parallel \beta$ D. α 与 β 的锐二面角为 60°

20. 【教学补订】从实数 $a_1 = a, a_2 = b$ 出发, 按 $a_{n+2} = a_n - \frac{7}{a_{n+1}}$ 递推; 遇到零分母即停止。选项 A、B 中的递增、递减专指无限数列的严格单调性。则 () A. $\{a_n\}$ 可能递增 B. $\{a_n\}$ 可能递减 C. $\{a_n\}$ 可能为有限项 D. $\{a_n\}$ 可能为无限项
21. 某校共 2017 名学生, 其中每名学生至少要选 A, B 中的一门课, 也有些学生选了两门课。已知选修 A 的人数占全校人数介于 70%–75%, 选 B 的人数占 40%–45%。则下列正确的是 () A. 同时选 A, B 的可能有 200 人 B. 可能有 300 人 C. 可能有 400 人 D. 可能有 500 人
22. 已知 D, E 是直角 $\triangle ABC$ 斜边 BC 上的三等分点。设 $AD = a, AE = b$, 则实数对 (a, b) 可以是 () A. (1, 1) B. (1, 2) C. (2, 3) D. (3, 4)
23. 已知函数 $f(x) = x^2 + 2x, m \geq 1$ 。若存在实数 t , 当 $x \in [1, m]$ 时有 $f(x+t) \leq 3x$ 恒成立, 则实数 m 可以等于 () A. 3 B. 6 C. 9 D. 12
24. 设 $x, y \in \mathbb{R}$, 函数 $f(x, y) = x^2 + 6y^2 - 2xy - 14x - 6y + 72$ 的值域为 M , 则 () A. $1 \in M$ B. $2 \in M$ C. $3 \in M$ D. $4 \in M$
25. 若 N 的三个子集满足 $|A \cap B| = |B \cap C| = |C \cap A| = 1$, 且 $A \cap B \cap C = \emptyset$, 则称 (A, B, C) 为 N 的“有序子集列”。现有 $N = \{1, 2, 3, 4, 5, 6\}$, 则 N 有 () 个有序子集列。A. 540 B. 1280 C. 3240 D. 7680