

2016 年清华大学领军计划测试

注意事项：领军测试均为不定项选择题；2016 年数学部分共 40 题，本版本收录 32 题；本题为回忆版本，故将部分选择题改编为填空题。

- 椭圆 $\frac{x^2}{a^2} + \frac{y^2}{b^2} = 1$ ($a, b > 0$)，两条直线 $l_1: y = \frac{1}{2}x$, $l_2: y = -\frac{1}{2}x$ 。过椭圆上一点 P 作 l_2 的平行线交 l_1 于 M ，作 l_1 的平行线交 l_2 于 N 。若 $|MN|$ 为定值，则 $\sqrt{\frac{a}{b}} = ()$ A. $\sqrt{2}$ B. $\sqrt{3}$ C. 2 D. $\sqrt{5}$
- 已知 x, y, z 为正整数， $x \leq y \leq z$ ，则方程 $\frac{1}{x} + \frac{1}{y} + \frac{1}{z} = \frac{1}{2}$ 的解有多少组？ A. 8 B. 10 C. 11 D. 12
- 将 16 个数：4 个 1、4 个 2、4 个 3、4 个 4 填入一个 4×4 的矩阵中，要求每行、每列正好有 2 个偶数，则共有_____种填法。
- 对于复数 z ($z \neq 0$)， $\frac{z}{10}$ 和 $\frac{40}{z}$ 的实部和虚部均为不小于 1 的正数，则在复平面中， z 所对应的向量 $\overrightarrow{OP}$ 的端点 P 运动所形成的图形面积为_____。
- 下列计算正确的是 ()
A. $\frac{\tan 1^\circ + \tan 61^\circ + \tan 121^\circ}{\tan 1^\circ \tan 61^\circ \tan 121^\circ} = 3$
B. $\frac{\tan 1^\circ \tan 61^\circ \tan 121^\circ}{\tan 1^\circ + \tan 61^\circ + \tan 121^\circ} = -3$
C. $\tan 1^\circ \tan 61^\circ + \tan 1^\circ \tan 121^\circ + \tan 61^\circ \tan 121^\circ = 3$
D. $\tan 1^\circ \tan 61^\circ + \tan 1^\circ \tan 121^\circ + \tan 61^\circ \tan 121^\circ = -3$
- 从 1-14 的正整数中任选若干数构成一个集合，该集合中任 3 个数不构成等差数列，求元素最多的集合的元素个数。
- 已知 $\tan 4\alpha = \frac{\sqrt{3}}{3}$ ，求
$$\frac{\sin 4\alpha}{\cos 8\alpha \cos 4\alpha} + \frac{\sin 2\alpha}{\cos 4\alpha \cos 2\alpha} + \frac{\sin \alpha}{\cos 2\alpha \cos \alpha} + \frac{\sin \alpha}{\cos \alpha}.$$
- 将 n 个不同字母各使用一次，任意排列后完全加括号，每次只乘两个因子；字母次序或括号结构不同即视为不同。例如三个字母的式子包括 $(ab)c, (ba)c, c(ab), c(ba)$ ，但不止这四种。记不同式子的总数为 I_n ，则 () (校订：补明计数规则。) A. $I_2 = 2$ B. $I_3 = 12$ C. $I_4 = 96$ D. $I_5 = 120$

9. $a, b, c \in \mathbb{R}$, $a^2 + b^2 + c^2 = 1$, $a + b + c = 1$, 那么 () A. $a_{\max} = \frac{2}{3}$ B. $(abc)_{\max} = 0$
C. $a_{\min} = -\frac{1}{3}$ D. $(abc)_{\max} = -\frac{4}{27}$
10. AB 为圆 O 的一条非直径弦, C 为弦中点, P 为圆上异于 A, B 的点。直线 PA, PB 分别交直线 OC 于 M, N , 各交点均存在且与相关点不重合。则下列说法恒正确的有 () A. O, M, B, P 共圆 B. A, M, B, N 共圆 C. A, O, P, N 共圆
11. F 为 BC 中点, $E \in AA_1$, $A_1E = \frac{1}{4}AA_1$, 正方体 $ABCD - A_1B_1C_1D_1$ 棱长为 1, 中心为 O , 求 V_{O-BEF} 。(校订: 恢复源图的 A_1E ; 原选项均不符, 将 A 改为正确值。) A. $\frac{1}{96}$ B. $\frac{17}{38}$
C. $\frac{11}{144}$ D. $\frac{11}{38}$
12. 一个正 2016 边形, 任选至少三个顶点按圆周顺序相连构成凸多边形, 其中正多边形有几个 (包括原正 2016 边形)? A. 6552 B. 4536 C. 3528 D. 2016
13. 不定方程 $x^2 + 615 = 2^y$ ($x, y \in \mathbb{N}^*$) 解的个数为 () A. 0 B. 1 C. 2 D. 3
14. O 在 $\triangle ABC$ 内, $S_{\triangle AOB} : S_{\triangle BOC} : S_{\triangle AOC} = 4 : 3 : 2$, $\overrightarrow{AO} = \lambda \overrightarrow{AB} + \mu \overrightarrow{AC}$, 求 λ, μ 。
15. $z = \cos \frac{2\pi}{3} + i \sin \frac{2\pi}{3}$, 求 $z^3 + \frac{z^2}{z^2 + z + 2}$ 。

16. 在 N 项有穷数列 $\{a_n\}$ 中, 满足: 当 $1 \leq i < j \leq N$ 时, $a_i < a_j$; 当 $1 \leq i < j < k \leq N$ 时, $a_i + a_j, a_i + a_k, a_j + a_k$ 至少有一项在 $\{a_n\}$ 中, 则 N 的最大值为_____。
17. 设 $n \in \mathbb{N}^*$, $\int_0^{2\pi} (x - \pi)^{2n-1} (1 + \sin^{2n} x) dx =$ _____。
18. $|z^2 + 1| = |z|$, 求 $|z|$ 的范围和幅角 $\theta \in [0, 2\pi)$ 的范围。
19. 在正三棱锥 $P-ABC$ 中, $\triangle ABC$ 边长为 1, 设 P 到平面 ABC 距离为 h 。当 h 趋近于正无穷时, 异面直线 AB 与 CP 之间距离的极限为_____。
20. x, y, z 均为非负实数, 满足 $\left(x + \frac{1}{2}\right)^2 + (y + 1)^2 + \left(z + \frac{3}{2}\right)^2 = \frac{27}{4}$, 则 $x + y + z$ 的最大值为_____, 最小值为_____。
21. 实数 $(x^2 + y^2)^3 = 4x^2y^2$, 则 $x^2 + y^2$ 的最大值为_____。
22. $f(x) = (x^2 + a)e^x$ 有最小值, 则 $x^2 + 2x + a = 0$ 的解的个数为_____。
23. $a_1 = 1, a_2 = 2, a_{n+2} = 6a_{n+1} - a_n$, 下列叙述正确的是 ()
- $a_{n+1}^2 - a_{n+1}a_n$ 为定值
 - $a_n \equiv 1 \text{ or } 2 \pmod{9}$
 - $4a_na_{n+1} - 7$ 为完全平方数
 - $8a_na_{n+1} - 7$ 为完全平方数
24. 已知抛物线 $E: y^2 = 4x, F(1, 0)$ 。过 F 作弦交 E 于 A, B , M 为 AB 中点, 则下列说法正确的是 ()
- 以 AB 为直径的圆与 $x = -\frac{3}{2}$ 始终相离
 - $|AB|$ 最小值为 4
 - $|AM|$ 最小值为 2
 - 以 BM 为直径的圆与 y 轴有且仅有一个交点
25. 对于函数 $y = x^2 - 1$ 和 $y = \ln x$, 下列说法正确的是 ()
- 二者在 $(1, 0)$ 处有公切线
 - 二者存在平行切线
 - 两者只有一个交点
 - 两者有两个交点
26. P 为椭圆 $\frac{x^2}{a^2} + \frac{y^2}{b^2} = 1 (a > b > 0)$ 上一点, F_1, F_2 为左、右焦点, 下列说法正确的是 ()
- $a = \sqrt{2}b$ 时, 满足 $\angle F_1PF_2 = 90^\circ$ 的 P 点有 2 个
 - $a > \sqrt{2}b$ 时, 满足 $\angle F_1PF_2 = 90^\circ$ 的 P 点有 4 个
 - $CF_{1F_2} < 4a$
 - $S_{PF_1F_2} \leq \frac{a^2}{2}$

27. 随机变量 ξ 的分布列为 $P(\xi = k) = a_k$ ($k = 1, 2, \dots, 10$), 则下列说法正确的是 ()
- A. 若 $a_1, a_2, \dots, a_{10}$ 成等差数列, 则 $a_5 + a_6 = \frac{1}{5}$
- B. 若 $a_1, a_2, \dots, a_{10}$ 满足 $a_n = \frac{1}{2^n}$ ($n = 1, 2, \dots, 9$), 则 $a_{10} = \frac{1}{2^9}$
- C. 若 $P(\xi \leq k) = k^2 a_k$, 则 $a_n = \frac{11n}{10(n+1)}$ ($n = 1, 2, \dots, 10$)
- D. 若 $na_n = (n+1)a_{n+1}$, 则 $a_n = \frac{11n}{10(n+1)}$
28. 甲、乙、丙、丁四人参加比赛并有两人获奖, 以下是四人对获奖人的猜测: 甲: “获奖者在乙、丙、丁中”; 乙: “我未获奖, 丙获奖”; 丙: “甲丁有一人获奖”; 丁: “乙说的是正确的”。已知四人中有两个人的猜测是正确的, 那么获奖人是_____。
29. 下列能构成唯一 $\triangle ABC$ 的是 ()
- A. $a = 1, b = 2, c \in \mathbb{Z}$
- B. $A = 150^\circ, a \sin A + c \sin C + \sqrt{2}a \sin C = b \sin B$
- C. $\cos A \sin B \cos C + \cos(B+C) \cos B \sin C = 0, C = 60^\circ$
- D. $a = \sqrt{3}, b = 1, A = 60^\circ$
30. 已知实数 x, y, z 满足 $x + y + z = 1, x^2 + y^2 + z^2 = 1$, 求 xyz 的最大值、最小值, 以及 $x + y$ 的最大值、最小值。
31. 甲、乙、丙、丁四个人进行网球赛, 规定甲乙一组、丙丁一组先打, 胜者再打决胜局。各场比赛独立, 表格中每格表示行选手战胜列选手的概率, 求甲夺冠的概率。
- | | 甲 | 乙 | 丙 | 丁 |
|---|-----|-----|-----|-----|
| 甲 | — | 0.3 | 0.3 | 0.8 |
| 乙 | 0.7 | — | 0.6 | 0.4 |
| 丙 | 0.7 | 0.4 | — | 0.5 |
| 丁 | 0.2 | 0.6 | 0.5 | — |
32. 设实数 $a, b, c \geq -\frac{1}{4}$ 且 $a + b + c = 1$, 则 $\sqrt{4a+1} + \sqrt{4b+1} + \sqrt{4c+1}$ 的最大值与最小值之积属于 () A. (8, 9) B. (11, 12) C. (12, 13) D. 以上答案都不对