

2016 年清华大学暑期学校测试

1. 已知 $0 < \log_a \frac{2}{3} < 1$ 且 $a \neq 1$, 求 a 的取值范围。
2. 在锐角 $\triangle ABC$ 中, $a = \sqrt{7}$, $b = 3$, $\sin A + \sqrt{7} \sin B = 2\sqrt{3}$, 求三角形的面积。
3. L 为 $C: y = \frac{a + \ln x}{x}$ 在 $(1, a)$ 处的切线。
 - (a) 求 L 的解析式;
 - (b) 证明: 当 $a \leq 1$ 时, L 除切点外恒在 C 的上方。
4. 已知椭圆 $C: \frac{x^2}{3} + \frac{y^2}{2} = 1$ 的左、右焦点为 F_1, F_2 。过 F_2 作斜率为 1 的直线与椭圆交于 A, C 两点; 过 F_1 作直线与椭圆交于 B, D 两点, $AC \perp BD$, 求四边形 $ABCD$ 的面积。
5. 定义 $f_M(x) = \begin{cases} -1, & x \in M, \\ 1, & x \notin M, \end{cases}$, $M \triangle N = \{x \mid f_M(x)f_N(x) = -1\}$ 。令 $U = \{1, 2, \dots, 2016\}$, $A = U$, $B = \{2, 4, \dots, 2016\}$ 。(教学改编: 原稿 B 为无穷偶数集, 无法得到有限的最小值; 这里限制在同一有限全集。)
 - (a) 求 $f_A(2016), f_B(2016)$;
 - (b) 设 $X \subseteq U$, $\text{card}(X)$ 为集合 X 的元素个数, 求 $J = \text{card}(X \triangle A) + \text{card}(X \triangle B)$ 的最小值。
6. 在立方体 $ABCD - A_1B_1C_1D_1$ 中, 在 $A_1B_1C_1D_1$ 面内有一点 M , 使得 $BM \parallel$ 平面 AD_1C , 求 $\tan \angle D_1MD$ 的最大值。
7. 已知圆 $C: x^2 + y^2 = 16$, A, B 为圆与 x 轴的交点 ($x_A < x_B$)。 l_1, l_2 是 A, B 处的切线。 P 为圆上一个不与 A, B 重合的点, 过 P 点的切线交 l_1, l_2 于 C, D 两点。 AD 与 BC 交于点 $M(m, n)$ 。(校订: 原稿 AC 与 BD 平行, 改为交叉连线。)
 - (a) 求 m^2 与 n^2 的关系;
 - (b) 存在一点 $Q(a, 0)$ ($a > 0$), 使 $|QM|$ 的最小值是 $\frac{\sqrt{7}}{2}$, 求 a 。

8. 数列 $\{a_n\}$ 满足 $a_n = 1 - \frac{1}{a_{n-1}}$ ($n \geq 2$), $a_1 = 2$ 。已知 $\{a_n\}$ 的通项可以表示成 $A \sin(\omega n + \varphi) + B$ 的形式, 求 $\{a_n\}$ 的一个表达式。
9. 已知 $A = \{x \mid x^2 - 2x - 3 > 0\}$, $B = \{x \mid x^2 + ax + b \leq 0\}$, $A \cup B = \mathbb{R}$, $A \cap B = (3, 5]$, 求 $a + b$ 的值。
10. 圆心在 $(0, 1)$ 的单位圆沿 x 轴正向滚动, 初始时刻 $P(0, 0)$ 。当圆心滚动至 $(\frac{\pi}{2}, 1)$ 时, 求此时的 $\overrightarrow{OP}$ 。
11. 已知 $f(x) = A \sin(\omega x + \varphi) + B$, 部分自变量、相位、函数值如下: 当相位为 0 时函数值为 1; 当相位为 $\frac{\pi}{2}$ 时函数值为 3; 当 $x = \frac{\pi}{3}$ 时相位为 $\frac{\pi}{2}$; 当 $x = \frac{7\pi}{12}$ 时相位为 $\frac{\pi}{6}$ 。
- (a) 求 $f(x)$ 的表达式;
 - (b) 求 $f(x)$ 的增区间;
 - (c) 求 $f(x)$ 在 $(0, \pi)$ 内的所有零点。
12. 已知等差数列 $\{a_n\}$ 及其前 n 项和 S_n , $S_{105} = 2016$, $S_{2016} = 105$, 求 S_{2121} 。