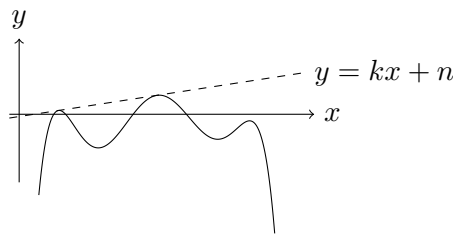


2015 年清华大学领军计划测试

本卷为不定项选择题，每题至少有一个正确选项。等比数列采用各项及公比均非零的通常定义。

1. 设复数 $z = \cos \frac{2\pi}{3} + i \sin \frac{2\pi}{3}$, 则 $\frac{1}{1-z} + \frac{1}{1-z^2} = ()$ A. 0 B. 1 C. $\frac{1}{2}$ D. $\frac{3}{2}$
2. 设数列 $\{a_n\}$ 为等差数列, p, q, k, l 为正整数, 则 “ $p+q > k+l$ ” 是 “ $a_p + a_q > a_k + a_l$ ” 的 () 条件. A. 充分不必要 B. 必要不充分 C. 充要 D. 既不充分也不必要
3. 设 A, B 是抛物线 $y = x^2$ 上两点, O 是坐标原点, 若 $OA \perp OB$, 则 () A. $|OA| \cdot |OB| \geq 2$ B. $|OA| + |OB| \geq 2\sqrt{2}$ C. 直线 AB 过抛物线 $y = x^2$ 的焦点 D. O 到直线 AB 的距离小于等于 1
4. 设函数 $f(x)$ 的定义域为 $(-1, 1)$, 且满足: $f(x) > 0, x \in (-1, 0)$; $f(x) + f(y) = f\left(\frac{x+y}{1+xy}\right), x, y \in (-1, 1)$. 则 $f(x)$ 为 () A. 奇函数 B. 偶函数 C. 减函数 D. 有界函数
5. 如图, 已知直线 $y = kx + n$ 与曲线 $y = f(x)$ 相切于两点, 则 $F(x) = f(x) - kx$ 有 () A. 2 个极大值点 B. 3 个极大值点 C. 2 个极小值点 D. 3 个极小值点



6. $\triangle ABC$ 的三边分别为 a, b, c . 若 $c = 2, \angle C = \frac{\pi}{3}$, 且 $\sin C + \sin(B-A) - 2\sin 2A = 0$, 则有 () A. $b = 2a$ B. $\triangle ABC$ 的周长为 $2 + 2\sqrt{3}$ C. $\triangle ABC$ 的面积为 $\frac{2\sqrt{3}}{3}$ D. $\triangle ABC$ 的外接圆半径为 $\frac{2\sqrt{3}}{3}$
7. 设 $f(x) = (x^2 - 3)e^x$, 则 () A. $f(x)$ 有极小值, 但无最小值 B. $f(x)$ 有极大值, 但无最大值 C. 若方程 $f(x) = b$ 恰有一个实根, 则 $b > \frac{6}{e^3}$ D. 若方程 $f(x) = b$ 恰有三个不同实根, 则 $0 < b < \frac{6}{e^3}$
8. 已知 $A = \{(x, y) \mid x^2 + y^2 = r^2\}, B = \{(x, y) \mid (x-a)^2 + (y-b)^2 = r^2\}$, 且 $A \cap B = \{(x_1, y_1), (x_2, y_2)\}$, 则 ()
 A. $0 < a^2 + b^2 < 2r^2$
 B. $a(x_1 - x_2) + b(y_1 - y_2) = 0$
 C. $x_1 + x_2 = a, y_1 + y_2 = b$
 D. $a^2 + b^2 = 2ax_1 + 2by_1$

9. 已知非负实数 x, y, z 满足 $4x^2 + 4y^2 + z^2 + 2z = 3$, 则 $5x + 4y + 3z$ 的最小值为 () A. 1 B. 2
C. 3 D. 4
10. 设数列 $\{a_n\}$ 的前 n 项和为 S_n . 若对任意正整数 n , 总存在正整数 m , 使得 $S_n = a_m$, 则 ()
A. $\{a_n\}$ 可能为等差数列 B. $\{a_n\}$ 可能为等比数列 C. $\{a_n\}$ 的任意一项均可写成 $\{a_n\}$ 的两项之差 D. 对任意正整数 n , 总存在正整数 m , 使得 $a_n = S_m$
11. 运动会上, 有 6 名选手参加 100 米比赛. 观众甲猜测: 4 道或 5 道的选手得第一名; 观众乙猜测: 3 道的选手不可能得第一名; 观众丙猜测: 1, 2, 6 道选手中的一位获得第一名; 观众丁猜测: 4, 5, 6 道的选手都不可能获得第一名. 比赛后发现没有并列名次, 且甲、乙、丙、丁中只有 1 人猜对比赛结果, 此人是 () A. 甲 B. 乙 C. 丙 D. 丁
12. 长方体 $ABCD - A_1B_1C_1D_1$ 中, $AB = 2$, $AD = AA_1 = 1$, 则 A 到平面 A_1BD 的距离为 ()
A. $\frac{1}{3}$ B. $\frac{2}{3}$ C. $\frac{\sqrt{2}}{2}$ D. $\frac{\sqrt{6}}{3}$
13. 设不等式组 $|x| + |y| \leq 2$, $y + 2 \leq k(x + 1)$ 所表示的区域为 D , 其面积为 S , 则 () A. 若 $S = 4$, 则 k 的值唯一 B. 若 $S = \frac{1}{2}$, 则 k 的值有 2 个 C. 若 D 为三角形, 则 $0 < k \leq \frac{2}{3}$
D. 若 D 为五边形, 则 $k > 4$
14. $\triangle ABC$ 的三边长是 2, 3, 4, 其外心为 O , 则 $\overrightarrow{OA} \cdot \overrightarrow{AB} + \overrightarrow{OB} \cdot \overrightarrow{BC} + \overrightarrow{OC} \cdot \overrightarrow{CA} =$ () A. 0 B. -15
C. $-\frac{21}{2}$ D. $-\frac{29}{2}$
15. 设随机事件 A 与 B 互相独立, 且 $P(B) = 0.5$, $P(A - B) = 0.2$, 则 () A. $P(A) = 0.4$
B. $P(B - A) = 0.3$ C. $P(AB) = 0.2$ D. $P(A + B) = 0.9$
16. 过 $\triangle ABC$ 的重心作直线将 $\triangle ABC$ 分成两部分, 则这两部分的面积之比为 () A. 最小值为 $\frac{3}{4}$
B. 最小值为 $\frac{4}{5}$ C. 最大值为 $\frac{4}{3}$ D. 最大值为 $\frac{5}{4}$

17. 从正 15 边形的顶点中选出 3 个构成钝角三角形, 则不同的选法有 () A. 105 种 B. 225 种
C. 315 种 D. 420 种

18. 已知存在实数 r , 使得圆周 $x^2 + y^2 = r^2$ 上恰好有 n 个整点, 则 n 可以等于 () A. 4 B. 6
C. 8 D. 12

19. 设复数 z 满足 $2|z| \leq |z - 1|$, 则 () A. $|z|$ 的最大值为 1 B. $|z|$ 的最小值为 $\frac{1}{3}$ C. z 的虚部的最大值为 $\frac{2}{3}$ D. z 的实部的最大值为 $\frac{1}{3}$

20. 设 m, n 是大于零的实数, $\mathbf{a} = (m \cos \alpha, m \sin \alpha)$, $\mathbf{b} = (n \cos \beta, n \sin \beta)$, 其中 $\alpha, \beta \in [0, 2\pi)$ 。定义

$$\mathbf{a}^{1/2} = \left(\sqrt{m} \cos \frac{\alpha}{2}, \sqrt{m} \sin \frac{\alpha}{2} \right), \quad \mathbf{b}^{1/2} = \left(\sqrt{n} \cos \frac{\beta}{2}, \sqrt{n} \sin \frac{\beta}{2} \right),$$

记 $\theta = \alpha - \beta$, 则 ()

A. $\mathbf{a}^{1/2} \cdot \mathbf{a}^{1/2} = \mathbf{a}$

B. $\mathbf{a}^{1/2} \cdot \mathbf{b}^{1/2} = \sqrt{mn} \cos \frac{\theta}{2}$

C. $\left| \mathbf{a}^{1/2} - \mathbf{b}^{1/2} \right|^2 \geq 4\sqrt{mn} \sin^2 \frac{\theta}{4}$

D. $\left| \mathbf{a}^{1/2} + \mathbf{b}^{1/2} \right|^2 \geq 4\sqrt{mn} \cos^2 \frac{\theta}{4}$

21. 设数列 $\{a_n\}$ 满足 $a_1 = 6$, $a_{n+1} = \frac{n+3}{n}a_n$, 则 () A. 对任意 $n \in \mathbb{N}^*$, $a_n < (n+1)^3$ B. 对任意 $n \in \mathbb{N}^*$, $a_n \neq 2015$ C. 存在 $n \in \mathbb{N}^*$, a_n 为完全平方数 D. 存在 $n \in \mathbb{N}^*$, a_n 为完全立方数

22. 在极坐标系中, 下列方程表示的图形是椭圆的有 ()

A. $\rho = \frac{1}{\cos \theta + \sin \theta}$

B. $\rho = \frac{1}{2 + \sin \theta}$

C. $\rho = \frac{1}{2 - \cos \theta}$

D. $\rho = \frac{1}{1 + 2 \sin \theta}$

23. 设函数 $f(x) = \frac{\sin \pi x}{x^2 - x + 1}$, 则 () A. $f(x) \leq \frac{4}{3}$ B. $|f(x)| \leq 5|x|$ C. 曲线 $y = f(x)$ 存在对称轴 D. 曲线 $y = f(x)$ 存在对称中心
24. $\triangle ABC$ 的三边分别为 a, b, c , 若 $\triangle ABC$ 为锐角三角形, 则 ()
A. $\sin A > \cos B$ B. $\tan A > \cot B$ C. $a^2 + b^2 > c^2$ D. $a^3 + b^3 > c^3$
25. 设函数 $f(x)$ 的定义域是 $(-1, 1)$, 若 $f(0) = f'(0) = 1$, 则存在实数 $\delta \in (0, 1)$, 使得 ()
A. $f(x) > 0, x \in (-\delta, \delta)$
B. $f(x)$ 在 $(-\delta, \delta)$ 上单调递增
C. $f(x) > 1, x \in (0, \delta)$
D. $f(x) > 1, x \in (-\delta, 0)$
26. 在直角坐标系中, 已知 $A(-1, 0), B(1, 0)$ 。若对于 y 轴上的任意 n 个不同的点 $P_k (k = 1, 2, \dots, n)$, 总存在两个不同的点 P_i, P_j , 使得 $|\sin \angle AP_i B - \sin \angle AP_j B| \leq \frac{1}{3}$, 则 n 的最小值为 () A. 3 B. 4 C. 5 D. 6
27. 设非负实数 x, y 满足 $2x + y = 1$, 则 $x + \sqrt{x^2 + y^2}$ 的 () A. 最小值为 $\frac{4}{5}$ B. 最小值为 $\frac{2}{5}$
C. 最大值为 1 D. 最大值为 $\frac{1 + \sqrt{2}}{3}$
28. 对于 50 个黑球和 49 个白球的任意排列 (从左到右排成一排), 则 () A. 存在一个黑球, 它右侧的白球和黑球一样多 B. 存在一个白球, 它右侧的白球和黑球一样多 C. 存在一个黑球, 它右侧的白球比黑球少一个 D. 存在一个白球, 它右侧的白球比黑球少一个
29. 从 1, 2, 3, 4, 5 中挑出三个不同数字组成五位数, 其中有两个数字各用两次, 例如 12231, 则能得到的不同五位数有 () A. 300 个 B. 450 个 C. 900 个 D. 1800 个
30. 设曲线 L 的方程为 $y^4 + (2x^2 + 2)y^2 + (x^4 - 2x^2) = 0$, 则 () A. L 是轴对称图形 B. L 是中心对称图形 C. $L \subseteq \{(x, y) \mid x^2 + y^2 \leq 1\}$ D. $L \subseteq \{(x, y) \mid -\frac{1}{2} \leq y \leq \frac{1}{2}\}$