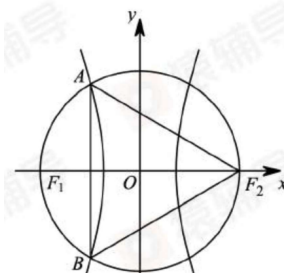


清华大学 2013 年夏令营数学试题

一、单项选择题 (共 8 小题, 每小题 5 分, 共 40 分)

- 对于不同的直线 m, n 和不同的平面 α, β , 下列命题中正确的是 ()
 - $m \perp \alpha, n \perp m \implies n \parallel \alpha$
 - $m \perp \alpha, n \perp \alpha \implies n \parallel m$
 - $m \subset \alpha, n \subset \beta, \alpha \parallel \beta \implies m, n$ 异面
 - $\alpha \cap \beta = n, n \perp m \implies m \perp \beta$
- 函数 $f(x) = \sqrt{3} \sin x \cos x + \cos^2 x$ 的单调增区间为 ()
 - $\left[k\pi - \frac{\pi}{3}, k\pi + \frac{\pi}{6}\right], k \in \mathbb{Z}$
 - $\left[\frac{k\pi}{2} - \frac{\pi}{3}, \frac{k\pi}{2} + \frac{\pi}{6}\right], k \in \mathbb{Z}$
 - $\left[k\pi - \frac{5\pi}{12}, k\pi + \frac{\pi}{12}\right], k \in \mathbb{Z}$
 - $\left[2k\pi - \frac{5\pi}{12}, k\pi + \frac{\pi}{12}\right], k \in \mathbb{Z}$
- 已知数列 $\{a_n\}$ 的各项均为正数, 若对任意正整数 p, q 总有 $a_{p+q} = a_p a_q$, 且 $a_8 = 16$, 则 $a_{10} =$ () A. 16 B. 32 C. 48 D. 64
- 若向量 $|\vec{a}| = 1, |\vec{b}| = 2, \vec{c} = \vec{a} + \vec{b}$, 且 $\vec{c} \perp \vec{a}$, 则向量 $2\vec{a} - \vec{b}$ 与 $\vec{b}$ 的夹角为 () A. 30° B. 60° C. 120° D. 150°

5. 如图, F_1, F_2 分别是双曲线 $\frac{x^2}{a^2} - \frac{y^2}{b^2} = 1$ ($a > 0, b > 0$) 的两个焦点, A, B 是以 O 为圆心、以 $|OF_1|$ 为半径的圆与该双曲线左支的两个交点, 且 $\triangle F_2AB$ 是等边三角形, 则双曲线的离心率为 () A. $\sqrt{3}$ B. $\sqrt{5}$ C. $\frac{\sqrt{5}}{2}$ D. $1 + \sqrt{3}$



6. 已知集合

$$A = \{x \mid -3 < x < 1\}, \quad B = \left\{x \mid \frac{x+2}{x-3} < 0\right\}.$$

设 (a, b) 为有序实数对, 其中 a 是从集合 A 中任取的一个整数, b 是从集合 B 中任取的一个整数, 则 “ $b - a \in A \cup B$ ” 的概率为 () A. $\frac{3}{4}$ B. $\frac{1}{4}$ C. $\frac{2}{3}$ D. $\frac{1}{3}$

7. 若存在锐角 α , 使得

$$\sin \alpha - \sqrt{3} \cos \alpha = \log_2(x^2 - x + 2)$$

成立, 则实数 x 的取值范围是 ()

- A. $(0, 1)$ (校订选项)
 B. $(-1, 2)$
 C. $[-1, 0) \cup (1, 2]$
 D. $(-1, 0) \cup (1, 2)$
8. 已知点 $P(x, y)$ 是直线 $kx + y + 4 = 0$ ($k > 0$) 上一动点, PA, PB 是圆 $C: x^2 + y^2 - 2y = 0$ 的两条切线, A, B 是切点。若四边形 $PACB$ 的最小面积是 2, 则 k 的值为 () A. 3 B. $\frac{\sqrt{21}}{2}$ C. $2\sqrt{2}$ D. 2

二、填空题 (共 4 小题, 每小题 5 分, 共 20 分)

9. 设集合 $A = \{1, 2\}$, 则满足 $A \cup B = \{1, 2, 3\}$ 的集合 B 的个数是 _____。
10. 一个三棱锥 $S - ABC$ 的三条侧棱 SA, SB, SC 两两互相垂直, 且长度均为 1。已知该三棱锥的四个顶点都在同一个球面上, 则这个球的表面积为 _____。
11. 已知点 $P(x, y)$ 满足
- $$\begin{cases} x - 4y + 3 \leq 0, \\ 3x + 5y \leq 25, \\ x - 1 \geq 0, \end{cases}$$
- 设 $A(2, 0)$, 则 $\overrightarrow{OP} \cdot \overrightarrow{OA}$ (O 为坐标原点) 的最大值为 _____。
12. 若定义域为 $\mathbb{R}$ 的函数 $f(x)$ 满足: 存在与 x 无关的正常数 M , 使 $|f(x)| \leq M|x|$ 对一切实数 x 均成立, 则称 $f(x)$ 为 j 函数。给出下列函数:
- (1) $f(x) = e^x$;
 - (2) $f(x) = \sin x$;
 - (3) $f(x) = \frac{x}{x^2 + x + 1}$;
 - (4) $f(x) = \frac{x^2}{x^2 + x + 1}$;
 - (5) $f(x) = \frac{x}{x + \frac{1}{x} + 1}$;
 - (6) $f(x)$ 是定义在 $\mathbb{R}$ 上的奇函数, 且对一切实数 x_1, x_2 均有 $|f(x_1) - f(x_2)| \leq 2|x_1 - x_2|$ 。
- 其中属于 j 函数的有 _____ (填序号)。

三、解答题 (共 4 小题, 每小题 10 分, 共 40 分)

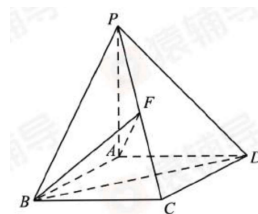
13. 在 $\triangle ABC$ 中, 角 A, B, C 所对的边分别是 a, b, c , 且

$$\tan A = \frac{1}{2}, \quad \cos B = \frac{3\sqrt{10}}{10}.$$

- (a) 求 $\tan C$ 的值;
- (b) 若 $\triangle ABC$ 最长的边长为 1, 求最短的边长。

14. 如图, 四棱锥 $P-ABCD$ 的底面 $ABCD$ 是菱形, $PA \perp$ 平面 $ABCD$, 点 F 为 PC 的中点。

- (a) 求证: $PA \parallel$ 平面 BDF ;
- (b) 求证: 平面 $PAF \perp$ 平面 BDF ;
- (c) 设 $BD = 3PA = 3AC = 3$, 求三棱锥 $P-ADF$ 的体积。



15. 已知函数 $f(x) = x \ln x$ 。

- (a) 求函数 $f(x)$ 在 $[1, 3]$ 上的最小值;
- (b) 若存在 $x \in \left[\frac{1}{e}, e\right]$, 使不等式

$$2f(x) \geq -x^2 + ax - 3$$

成立, 求实数 a 的取值范围。

16. 设直线 $l: y = k(x+1)$ 与椭圆 $x^2 + 3y^2 = a^2$ ($a > 0$) 相交于 A, B 两个不同的点, 与 x 轴相交于点 C , 记 O 为坐标原点。

- (a) 证明: $a^2 > \frac{3k^2}{1+3k^2}$;
- (b) 若 $\overrightarrow{AC} = 2\overrightarrow{CB}$, 求 $\triangle OAB$ 的面积取得最大值时的椭圆方程。