

清华大学 2012 年暑期学校学业水平测试数学试题

一、单项选择题 (共 6 小题, 每小题 4 分, 共 24 分)

1. 复数 z 满足 $|z| - z = \frac{1}{2} - \frac{\sqrt{3}}{2}i$, 则 $\frac{1}{z} = ()$ A. $\frac{1}{2} + \frac{\sqrt{3}}{2}i$ B. $\frac{1}{2} - \frac{\sqrt{3}}{2}i$ C. $-\frac{1}{2} + \frac{\sqrt{3}}{2}i$
D. $-\frac{1}{2} - \frac{\sqrt{3}}{2}i$
2. 函数 $f(x)$ 在 $(-3, 0)$ 上单调递减, $g(x) = f(x-3)$ 是偶函数, 则正确的结论是 ()
A. $f\left(-\frac{3}{2}\right) < f\left(-\frac{7}{2}\right) < f(-5)$
B. $f(-5) < f\left(-\frac{7}{2}\right) < f\left(-\frac{3}{2}\right)$
C. $f(-5) < f\left(-\frac{3}{2}\right) < f\left(-\frac{7}{2}\right)$
D. $f\left(-\frac{7}{2}\right) < f\left(-\frac{3}{2}\right) < f(-5)$
3. 已知向量 $\vec{x}$ 与 $\vec{y}$ 的夹角为 $\frac{2\pi}{3}$, $|\vec{x}| = 3$, $|\vec{x} + \vec{y}| = \sqrt{13}$, 则 $|\vec{y}| = ()$ A. 2 B. 4 C. 5 D. 6
4. 设 $f(x) + f'(x) > 0$, 当 $x > 0$ 时一定有 () A. $f(x) < f(0)$ B. $f(x) > f(0)$ C. $e^x f(x) < f(0)$
D. $e^x f(x) > f(0)$
5. 当 $0 < k < 1$ 时, 关于 x 的方程 $|1 - x^2| = kx + k$ 的解的个数是 () A. 1 B. 2 C. 3 D. 4
6. 某企业生产的电子元件次品率为 10%。为保证质量, 检测部门对该产品进行独立抽查, 每次抽检一个且次品概率均为 10%, 若抽到次品则抽查结束, 否则继续抽查。则抽查产品件数的数学期望与方差分别为 ()
A. $E\xi = 10, D\xi = 90$
B. $E\xi = 10, D\xi = 9$
C. $E\xi = 9, D\xi = 90$
D. $E\xi = 9, D\xi = 9$

二、填空题 (共 4 小题, 每小题 6 分, 共 24 分)

7. 设 $S \subset \{1, 2, 3, 4, 5, 6\}$, 令 S 为非空集合, 且满足 “若 $a \in S$, 则 $6 - a \in S$ ”, 则集合 S 共有 _____ 个。

8. 已知

$$(\sqrt{3} - \sqrt{2}x)^{99} = a_0 - a_1x + a_2x^2 - a_3x^3 + \cdots - a_{99}x^{99},$$

则

$$(a_0 + a_2 + \cdots + a_{98})^2 - (a_1 + a_3 + \cdots + a_{99})^2 = \text{_____}.$$

9. 设 $a, b \in \mathbb{R}^+$ 且 $a + b = 1$, 则 $ab + \frac{1}{ab}$ 的最小值为 _____。

10. 有编号为 1, 2 的两个红球, 编号为 3, 4 的两个黑球, 编号为 5, 6, 7 的三个白球。将这七个球放入编号为 A, B, C, D, E 的五个盒中, 要求每个盒中放一个或两个球, 而且同色球不能放入同一盒中, 则不同放置共有 _____ 种。

三、解答题

11. (8 分) 设 x 满足 $x^3 - \frac{1}{x^3} = 8\sqrt{5}$, 求 $x^2 + \frac{1}{x^3}$ 的值。

12. (10 分) 设 $0 < a < b$, $f(x) = \frac{1}{x}$, 过 $(a, f(a))$ 、 $(b, f(b))$ 两点的直线方程为 $y = cx + d$ 。

(a) 证明: 当 $a < x < b$ 时, $cx + d \geq \frac{1}{x}$;

(b) 证明: $\ln(1+n) + \frac{n}{2(n+1)} < 1 + \frac{1}{2} + \cdots + \frac{1}{n}$ 。