

2012 年“华约”自主招生测试

一、选择题

1. 在钝角 $\triangle ABC$ 中, 已知 $A > B > C$, 则 $\cos B$ 的取值范围为 () A. $\left(0, \frac{\sqrt{2}}{2}\right)$ B. $\left[\frac{1}{2}, \frac{\sqrt{2}}{2}\right)$
C. $(0, 1)$ D. $\left(\frac{\sqrt{2}}{2}, 1\right)$
2. 红、蓝两色车、马、炮棋子各一枚, 将这 6 枚棋子排成一列, 其中每对同字的棋子中均为红棋子在前、蓝棋子在后, 满足条件的不同排列方式共有 () A. 36 种 B. 60 种 C. 90 种 D. 120 种
3. 正四棱锥 $S-ABCD$ 中, 侧棱与底面所成角为 α , 侧面与底面所成二面角为 β , 侧棱 SB 与底面正方形 $ABCD$ 的对角线 AC 所成角为 γ , 相邻两侧面所成二面角为 θ , 则 $\alpha, \beta, \gamma, \theta$ 的大小关系是 () A. $\alpha < \beta < \theta < \gamma$ B. $\alpha < \beta < \gamma < \theta$ C. $\alpha < \gamma < \beta < \theta$ D. $\beta < \alpha < \gamma < \theta$
4. 向量 $\mathbf{a} \neq \mathbf{e}$ ($\mathbf{e}$ 是单位向量), $|\mathbf{e}| = 1$. 若对任意 $t \in \mathbb{R}$, $|\mathbf{a} - t\mathbf{e}| \geq |\mathbf{a} + \mathbf{e}|$, 则 () A. $\mathbf{a} \perp \mathbf{e}$
B. $\mathbf{a} \perp (\mathbf{a} + \mathbf{e})$ C. $\mathbf{e} \perp (\mathbf{a} + \mathbf{e})$ D. $(\mathbf{a} + \mathbf{e}) \perp (\mathbf{a} - \mathbf{e})$

5. 若复数 $\frac{w-1}{w+1}$ 的实部为 0, Z 是复平面上对应 $\frac{1}{1+w}$ 的点, 则点 $Z(x,y)$ 的轨迹是 () A. 一条直线 B. 一条线段 C. 一个圆 D. 一段圆弧

6. 椭圆长轴长为 4, 左顶点在圆 $(x-4)^2 + (y-1)^2 = 4$ 上, 左准线为 y 轴, 则此椭圆离心率的取值范围是 () A. $\left[\frac{1}{8}, \frac{1}{4}\right]$ B. $\left[\frac{1}{4}, \frac{1}{2}\right]$ C. $\left[\frac{1}{8}, \frac{1}{2}\right]$ D. $\left[\frac{1}{2}, \frac{3}{4}\right]$

7. 已知三棱锥 $S-ABC$ 的底面 ABC 为正三角形, 点 A 在侧面 SBC 上的射影 H 是 $\triangle SBC$ 的垂心, 二面角 $H-AB-C$ 为 30° , 且 $SA=2$, 则此三棱锥的体积为 () A. $\frac{1}{2}$ B. $\frac{\sqrt{3}}{2}$ C. $\frac{\sqrt{3}}{4}$ D. $\frac{3}{4}$

8. 在锐角 $\triangle ABC$ 中, AB 边上的高 CD 与 AC 边上的高 BE 交于点 H 。以 DE 为直径作圆, 与 AC 的另一个交点为 G 。已知 $BC = 25$, $BE = 20$, $BD = 7$, 则 AG 的长为 () A. 8 B. $\frac{42}{5}$
C. 10 D. $\frac{54}{5}$

9. 已知数列 $\{a_n\}$ 的通项公式为 $a_n = \lg\left(1 + \frac{2}{n^2 + 3n}\right)$, $n = 1, 2, \dots$, S_n 是数列的前 n 项和, 则 $\lim_{n \rightarrow \infty} S_n =$ () A. 0 B. $\lg \frac{3}{2}$ C. $\lg 2$ D. $\lg 3$

10. 已知 $-6 \leq x_i \leq 10$ ($i = 1, 2, \dots, 10$), $\sum_{i=1}^{10} x_i = 50$ 。当 $\sum_{i=1}^{10} x_i^2$ 取得最大值时, 在 $x_1, x_2, \dots, x_{10}$ 这十个数中等于 -6 的数共有 () A. 1 个 B. 2 个 C. 3 个 D. 4 个

二、解答题

11. 在 $\triangle ABC$ 中, A, B, C 的对边分别为 a, b, c 。已知 $2 \sin^2 \frac{A+B}{2} = 1 + \cos 2C$:
- (a) 求 C 的大小;
- (b) 若 $c^2 = 2b^2 - 2a^2$, 求 $\cos 2A - \cos 2B$ 的值。

12. 已知两点 $A(-2, 0), B(2, 0)$, 动点 P 在 y 轴上的射影是 H , 且 $\overrightarrow{PA} \cdot \overrightarrow{PB} = 2|\overrightarrow{PH}|^2$.
- 求动点 P 的轨迹 C 的方程;
 - 已知过点 B 的直线交曲线 C 于 x 轴下方不同的两点 M, N , 设 MN 的中点为 R ; 过 R 和点 $Q(0, -2)$ 作直线 RQ , 求直线 RQ 斜率的取值范围。
13. 系统中每个元件正常工作的概率都是 p ($0 < p < 1$), 各元件正常工作的事件相互独立。如果系统中有多于一半的元件正常工作, 系统就能正常工作。系统正常工作的概率称为系统的可靠性。
- 某系统配置有 $2k - 1$ 个元件, k 为正整数, 求该系统正常工作概率的表达式;
 - 现为改善 (1) 中系统的性能, 拟增加两个元件。试讨论增加两个元件后能否提高系统的可靠性。
14. 记函数 $f_n(x) = 1 + x + \frac{x^2}{2!} + \cdots + \frac{x^n}{n!}$, $n = 1, 2, \dots$ 。证明: 当 n 是偶数时, 方程 $f_n(x) = 0$ 没有实根; 当 n 是奇数时, 方程 $f_n(x) = 0$ 有唯一实根 θ_n , 且 $\theta_n > \theta_{n+2}$ 。
15. 某乒乓球培训班共有 n 位学员, 在班内双打训练赛期间, 每两名学员都作为搭档恰好参加过一场双打比赛。试确定 n 的所有可能值, 并分别给出对应的一种安排比赛的方案。