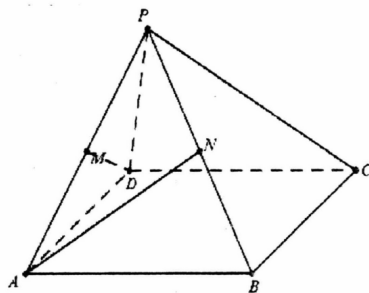


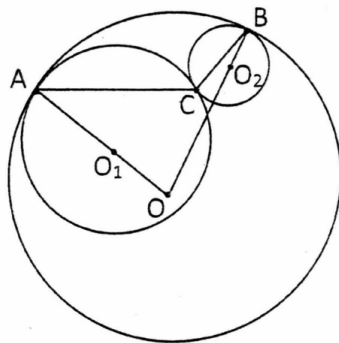
2011 年“华约”自主招生测试

一、选择题

1. 设复数 z 满足 $0 < |z| < 1$, 且 $\left| \bar{z} + \frac{1}{z} \right| = \frac{5}{2}$, 则 $|z| = ()$ A. $\frac{4}{5}$ B. $\frac{3}{4}$ C. $\frac{2}{3}$ D. $\frac{1}{2}$
2. 在正四棱锥 $P-ABCD$ 中, M, N 分别为 PA, PB 的中点, 且侧面与底面所成二面角的正切为 $\sqrt{2}$, 则异面直线 DM 与 AN 所成角的余弦为 $()$ A. $\frac{1}{3}$ B. $\frac{1}{6}$ C. $\frac{1}{8}$ D. $\frac{1}{12}$



3. 曲线 $f(x) = x^3 - x^2 - 2x + 1$, 过点 $(-1, 1)$ 的直线 l 与曲线相切, 且 $(-1, 1)$ 不是切点, 则直线 l 的斜率为 $()$ A. 2 B. 1 C. -1 D. -2
4. 若 $A + B = \frac{2\pi}{3}$, 则 $\cos^2 A + \cos^2 B$ 的最小值和最大值分别为 $()$ A. $1 - \frac{\sqrt{3}}{2}, \frac{3}{2}$ B. $\frac{1}{2}, \frac{3}{2}$
C. $1 - \frac{\sqrt{3}}{2}, 1 + \frac{\sqrt{3}}{2}$ D. $\frac{1}{2}, 1 + \frac{\sqrt{2}}{2}$
5. 如图, 圆 O_1 和圆 O_2 外切于点 C , 圆 O_1 、圆 O_2 又都和圆 O 内切, 切点分别为 A, B . 设 $\angle AOB = \alpha, \angle ACB = \beta$, 则正确的关系为(可多选) $()$ A. $\cos \beta + \sin \frac{\alpha}{2} = 0$ B. $\sin \beta - \cos \frac{\alpha}{2} = 0$
C. $\sin 2\beta + \cos \alpha = 0$ D. $\sin 2\beta - \sin \alpha = 0$

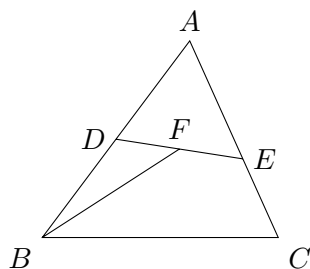


6. 已知异面直线 a, b 成 60° 角, A 为空间一点, 则过 A 与 a, b 都成 45° 角的平面 () A. 有且只有一个 B. 有且只有两个 C. 有且只有三个 D. 有且只有四个

7. 已知向量 $\mathbf{a} = (0, 1)$, $\mathbf{b} = \left(-\frac{\sqrt{3}}{2}, -\frac{1}{2}\right)$, $\mathbf{c} = \left(\frac{\sqrt{3}}{2}, -\frac{1}{2}\right)$, $x\mathbf{a} + y\mathbf{b} + z\mathbf{c} = (1, 1)$, 则 $x^2 + y^2 + z^2$ 的最小值为 () A. 1 B. $\frac{4}{3}$ C. $\frac{3}{2}$ D. 2

8. AB 为过抛物线 $y^2 = 4x$ 焦点 F 的弦, O 为坐标原点, 且 $\angle OFA = 135^\circ$, C 为抛物线准线与 x 轴的交点, 则 $\angle ACB$ 的正弦值为 () A. $2\sqrt{2}$ B. $\frac{4\sqrt{2}}{5}$ C. $\frac{4\sqrt{2}}{3}$ D. $\frac{2\sqrt{2}}{3}$

9. 如图, 已知 $\triangle ABC$ 的面积为 2, D, E 分别为边 AB, AC 上的点, F 为线段 DE 上一点。设 $\frac{AD}{AB} = x, \frac{AE}{AC} = y, \frac{DF}{DE} = z$, 且 $y + z - x = 1$, 则 $\triangle BDF$ 面积的最大值为 () A. $\frac{8}{27}$
B. $\frac{10}{27}$ C. $\frac{14}{27}$ D. $\frac{16}{27}$



10. 将一个正 11 边形用对角线划分为 9 个三角形, 这些对角线在正 11 边形内两两不相交, 则 ()
A. 存在某种分法, 所分出的三角形都不是锐角三角形 B. 存在某种分法, 所分出的三角形恰有两个锐角三角形
C. 存在某种分法, 所分出的三角形至少有 3 个锐角三角形 D. 任何一种分法所分出的三角形都恰有 1 个锐角三角形

二、解答题

11. 已知 $\triangle ABC$ 不是直角三角形。

(a) 证明: $\tan A + \tan B + \tan C = \tan A \tan B \tan C$;

(b) 若 $\sqrt{3}\tan C - 1 = \frac{\tan B + \tan C}{\tan A}$, 且 $\sin 2A, \sin 2B, \sin 2C$ 的倒数成等差数列, 求 $\cos \frac{A-C}{2}$ 的值。

12. 已知圆柱形水杯质量为 a 克, 其重心在圆柱轴的中点处 (杯底厚度及重量忽略不计, 且水杯直立放置), 质量为 b 克的水恰好装满水杯, 装满水后的水杯重心还在圆柱轴的中点处。
- (a) 若 $b = 3a$, 求装入半杯水的水杯重心到杯底面的距离与水杯高的比值;
- (b) 水杯内装多少克水可以使装入水后的水杯重心最低? 为什么?

13. 已知函数 $f(x) = \frac{2x}{ax+b}$, $f(1) = 1$, $f\left(\frac{1}{2}\right) = \frac{2}{3}$ 。令 $x_1 = \frac{1}{2}$, $x_{n+1} = f(x_n)$ 。
- (a) 求数列 $\{x_n\}$ 的通项公式;
- (b) 证明: $x_1 x_2 \cdots x_{n+1} > \frac{1}{2e}$ 。

14. 已知双曲线 $C: \frac{x^2}{a^2} - \frac{y^2}{b^2} = 1$ ($a > 0, b > 0$), F_1, F_2 分别为 C 的左、右焦点。 P 为 C 右支上一点, 且使 $\angle F_1 P F_2 = \frac{\pi}{3}$, 又 $\triangle F_1 P F_2$ 的面积为 $3\sqrt{3}a^2$ 。
- (a) 求 C 的离心率 e ;
- (b) 设 A 为 C 的左顶点, Q 为第一象限内 C 上的任意一点。问是否存在常数 λ ($\lambda > 0$), 使得 $\angle Q F_2 A = \lambda \angle Q A F_2$ 恒成立? 若存在, 求出 λ ; 若不存在, 请说明理由。

15. 将一枚均匀的硬币连续抛掷 n 次, 以 p_n 表示未出现连续 3 次正面的概率。
- (a) 求 p_1, p_2, p_3, p_4 ;
- (b) 探究数列 $\{p_n\}$ 的递推公式, 并给出证明;
- (c) 讨论数列 $\{p_n\}$ 的单调性及其极限, 并阐述该极限的概率意义。