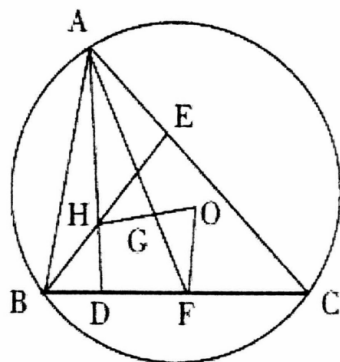


2010 年“华约”自主招生测试

一、选择题

1. 设复数 $\omega = \left(\frac{a+i}{1+i}\right)^2$, 其中 a 为实数。若 ω 的实部为 2, 则 ω 的虚部为 () A. $-\frac{3}{2}$ B. $-\frac{1}{2}$
C. $\frac{1}{2}$ D. $\frac{3}{2}$
2. 设向量 $\mathbf{a}, \mathbf{b}$ 满足 $|\mathbf{a}| = |\mathbf{b}| = 1, \mathbf{a} \cdot \mathbf{b} = m$, 则 $|\mathbf{a} + t\mathbf{b}| (t \in \mathbb{R})$ 的最小值为 () A. 2 B. $\sqrt{1+m^2}$
C. 1 D. $\sqrt{1-m^2}$
3. 平面 α, β , 直线 m, n , 点 A, B 满足: $\alpha \parallel \beta, m \subset \alpha, n \subset \beta, A \in \alpha, B \in \beta$, 且 AB 与 α 所成的角为 $\frac{\pi}{4}, m \perp AB, n$ 与 AB 所成的角为 $\frac{\pi}{3}$, 则 m 与 n 所成角的大小为 () A. $\frac{\pi}{3}$ B. $\frac{\pi}{4}$
C. $\frac{\pi}{6}$ D. $\frac{\pi}{8}$
4. 在四棱锥 $V-ABCD$ 中, B_1, D_1 分别为侧棱 VB, VD 的中点, 则四面体 AB_1CD_1 的体积与四棱锥 $V-ABCD$ 的体积之比为 () A. 1:6 B. 1:5 C. 1:4 D. 1:3
5. 在 $\triangle ABC$ 中, 三边长 a, b, c 满足 $a+c=3b$, 则 $\tan \frac{A}{2} \tan \frac{C}{2}$ 的值为 () A. $\frac{1}{5}$ B. $\frac{1}{4}$ C. $\frac{1}{2}$
D. $\frac{2}{3}$

6. 如图, $\triangle ABC$ 的两条高线 AD, BE 交于 H , 其外接圆圆心为 O ; 过 O 作 $OF \perp BC$ 于 F , OH 与 AF 相交于 G , 则 $\triangle OFG$ 与 $\triangle GAH$ 面积之比为 () A. 1:4 B. 1:3 C. 2:5 D. 1:2



7. 设 $f(x) = e^{ax}$ ($a > 0$)。过点 $P(a, 0)$ 且平行于 y 轴的直线与曲线 $C: y = f(x)$ 的交点为 Q , 曲线 C 过点 Q 的切线交 x 轴于点 R , 则 $\triangle PQR$ 面积的最小值为 () A. 1 B. $\frac{\sqrt{2}e}{2}$ C. $\frac{e}{2}$ D. $\frac{e^2}{4}$

8. 设双曲线 $C_1: \frac{x^2}{a^2} - \frac{y^2}{4} = k$ ($a > 2, k > 0$), 椭圆 $C_2: \frac{x^2}{a^2} + \frac{y^2}{4} = 1$ 。若 C_2 的短轴长与 C_1 的实轴长的比值等于 C_2 的离心率, 则 C_1 在 C_2 的一条准线上截得线段的长为 () A. $2\sqrt{2+k}$ B. 2 C. $4\sqrt{4+k}$ D. 4

9. 欲将正六边形的各边和各条对角线都染为 n 种颜色之一, 使得以正六边形的任意 3 个顶点作为顶点的三角形有 3 种不同颜色的边, 并且不同的三角形使用不同的三色组合, 则 n 的最小值为 () A. 6 B. 7 C. 8 D. 9
10. 设定点 A, B, C, D 是以 O 点为中心的正四面体的顶点。用 σ 表示空间以直线 OA 为轴、满足 $\sigma(B) = C$ 的旋转; 用 τ 表示空间关于 OCD 所在平面的镜面反射; 设 l 为过 AB 中点与 CD 中点的直线, 用 ω 表示空间以 l 为轴的 180° 旋转。设 $\sigma \circ \tau$ 表示先作 τ 再作 σ , 则 ω 可以表示为 () A. $\sigma \circ \tau \circ \sigma \circ \tau \circ \sigma$ B. $\sigma \circ \tau \circ \sigma \circ \tau \circ \sigma \circ \tau$ C. $\tau \circ \sigma \circ \tau \circ \sigma \circ \tau$ D. $\sigma \circ \tau \circ \sigma \circ \sigma \circ \tau \circ \sigma$

二、解答题

11. 在 $\triangle ABC$ 中, 已知 $2\sin^2 \frac{A+B}{2} + \cos 2C = 1$, 外接圆半径 $R = 2$ 。
- (a) 求角 C 的大小;
- (b) 求 $\triangle ABC$ 面积的最大值。
12. 设 A, B, C, D 为抛物线 $x^2 = 4y$ 上不同的四点, A, D 关于该抛物线的对称轴对称, BC 平行于该抛物线在点 D 处的切线 l 。设 D 到直线 AB, AC 的距离分别为 d_1, d_2 , 已知 $d_1 + d_2 = \sqrt{2}|AD|$ 。
- (a) 判断 $\triangle ABC$ 是锐角、直角、钝角三角形中的哪一种, 并说明理由;
- (b) 若 $\triangle ABC$ 的面积为 240, 求点 A 的坐标及直线 BC 的方程。

13. (a) 正四棱锥的体积 $V = \frac{\sqrt{2}}{3}$, 求正四棱锥表面积的最小值;
 (b) 一般地, 设正 n 棱锥的体积 V 为定值, 试给出不依赖于 n 的一个充分必要条件, 使得正 n 棱锥的表面积取得最小值。

14. 假定亲本总体中三种基因型 AA, Aa, aa 的比例为 $u : 2v : w$ ($u > v > 0, u + 2v + w = 1$), 且数量充分多, 参与交配的亲本是该总体中随机的两个。
 (a) 求子一代中三种基因型的比例;
 (b) 子二代的三种基因型比例与子一代相同吗? 并说明理由。

15. 设函数 $f(x) = \frac{x+m}{x+1}$, 且存在函数 $s = \varphi(t) = at + b$ ($t > \frac{1}{2}, a \neq 0$) 满足

$$f\left(\frac{2t-1}{t}\right) = \frac{2s+1}{s}.$$

- (a) 证明: 存在函数 $t = \psi(s) = cs + d$ ($s > 0$), 满足 $f\left(\frac{2s+1}{s}\right) = \frac{2t-1}{t}$;
 (b) 设 $x_1 = 3, x_{n+1} = f(x_n), n = 1, 2, \dots$, 证明: $|x_n - 2| \leq \frac{1}{3^{n-1}}$ 。