

2024 年上海交通大学数学笔试

强基计划回忆版

校订教学版：标有“教学改编”“补全”等字样的题目包含编者修订，不作为原卷逐字复原。

1. 【设问补全】 f 在 $(0, +\infty)$ 上可导, $f(x) > 0$ 且 $f(x) + f'(x) < 0$ 。已知 $0 < a < 1 < b, ab < 1$ 。(1) 比较 $e^a f(a), e f(1), e^b f(b), e^{1/a} f(1/a)$ 的大小; (2) 固定 a, b , 求 $f(a)/f(b)$ 在所有满足条件的函数中的下确界, 并判断能否取到。
2. 设 a 为 4444^{4444} 的各位数字和, b 为 a 的各位数字和, c 为 b 的各位数字和, 求 c 。
3. 【采用源文件附录中的完整版本】 $f(x) = ax^3 + bx^2 + cx + d$, 且对所有 $x \in [0, 1]$ 有 $|f'(x)| \leq 1$ 。求 a 的最小值, 并给出一个取等的函数。
4. 若 $x^2 + (y - 2)^2 \leq 1$, 求 $\frac{x + \sqrt{3}y}{\sqrt{x^2 + y^2}}$ 的取值范围。
5. 抛物线 $y = x^2 + ax + b - 2$ 在 $|x| \geq 2$ 时与 x 轴有交点, 求 $a^2 + b^2$ 的最小值。
6. 设整数 $n \geq 2$, $w = \cos \frac{2\pi}{n} + i \sin \frac{2\pi}{n}$, 求 $(1 - w)(1 - w^2) \cdots (1 - w^{n-1})$ 。
7. $|z| = 1$, 求 $|z + iz + 1|$ 的最小值。
8. 双曲线 $\frac{x^2}{9} - \frac{y^2}{16} = 1$, 过左焦点 F 作圆 $x^2 + y^2 = 9$ 的切线, 切点为 M ; 切线延长交双曲线右支于 P 。 PF 中点为 T , 求 $|OM| + |OT|$ 。
9. 过点 $P(1, 1)$ 作两条不同的直线, 与抛物线 $y^2 = 2x$ 分别交于 A, B 和 C, D 四个互不相同的点。判断“ AB, CD 的倾斜角互补”是“四点共圆”的何种条件, 并证明。
10. 【教学补全】抛物线 $y^2 = 4x$, 点 $P(m, 0)$, 其中 $m > 0$ 。过 P 作两条互相垂直的直线, 分别交抛物线于 A, B 和 C, D ; AB, CD 中点分别为 M, N 。求 $S_{\triangle PMN}$ 的最小值及取等条件。
11. 【明确题意】设 $b > 0$, 直线 $x + y + 3 = 0$ 上存在一点 P , 从 P 可向双曲线 $\frac{x^2}{9} - \frac{y^2}{b^2} = 1$ 引两条互相垂直的实切线 (切点为有限点)。求双曲线离心率的取值范围。

12. $f(x) = ax + \sin x$, 若其图象存在两条互相垂直的切线, 求整数 a 的取值。
13. 求函数 $y = \left(\frac{1}{2}\right)^x + \left(\frac{2}{3}\right)^x + \left(\frac{5}{6}\right)^x$ 图象上的整点个数。
14. 【教学补全】非负整数 $x_1, \dots, x_{10}$ 满足 $x_1 + \dots + x_{10} = 49$ 。求 $x_1^2 + \dots + x_{10}^2$ 的最大值与最小值之和, 并给出取等情形。
15. 均匀正方体六面标有 $1, 2, 3, 4, 5, 6$ 。独立掷三次得 a_1, a_2, a_3 , 求 $|a_1 - a_2| + |a_2 - a_3| + |a_3 - a_1| = 6$ 的概率。
16. 【修正定义域】 $f: \mathbb{R} \setminus \{0\} \rightarrow (0, +\infty)$ 为偶函数, 对任意正数 a, b 有 $f(\sqrt{a^2 + b^2}) = \frac{f(a)f(b)}{f(a) + f(b)}$, 且 $f(1) = 2$ 。求 $f(-6)$, 并进一步求正有理数 r 对应的 $f(\sqrt{r})$ 。
17. 定义 $[x]$ 为不超过 x 的最大整数, 求满足 $\left[\frac{x}{2}\right] + \left[\frac{x}{3}\right] + \left[\frac{x}{5}\right] = x$ 的整数 x 的个数。
18. 【教学改编】正三棱锥 $P-ABC$ 的底面边长为 3 , 高为 $H = 3\sqrt{3}/2$, 底面中心为 O 。平行于底面的截面交 PA, PB, PC 于 A', B', C' ; 点 Q 位于线段 OP 上且在截面下方。若 $Q-A'B'C'$ 是正四面体, 求其棱长的最大值及取等位置。
19. 【教学改编】 $n \geq 5$ 个点之间指定若干条连线。在任意四点中, 至少有一点与这四点中的其余三点都有连线。证明: 至少有 $n-3$ 个点与全部其余点相连; 并构造说明这个下界不能提高。
20. 设实数 $k \neq 0$, $f(x) = e^{kx} - \frac{2 \ln x}{kx} + 1$, $g(x) = x \ln x$, $x > 0$ 。若 $kf(x) \geq 2g(x)$ 对所有 $x > 0$ 恒成立, 求 k 的取值范围。
21. 椭圆 $\frac{x^2}{4} + y^2 = 1$ 的左右焦点为 F_1, F_2 , 点 P 在直线 $x + 2\sqrt{3}y - 4\sqrt{3} = 0$ 上。当 $\angle F_1PF_2$ 最大时, 求 $\frac{PF_1}{PF_2}$ 。