

2022 年上海交通大学数学笔试

校订教学版：标有“教学改编”“补全”等字样的题目包含编者修订，不作为原卷逐字复原。

1. 等比数列 $\{a_n\}$ 中, $a_1 = -3$, $\frac{S_6}{S_3} = \frac{7}{8}$, 求 $\lim_{n \rightarrow \infty} S_n$. A. 不存在; B. $\frac{2}{3}$; C. $-\frac{2}{3}$; D. -2 。
2. $A = \{1, 2, t\}$, $B = \{a^2 \mid a \in A\}$, $C = A \cup B$. 若 C 中元素和为 6, 求元素积. A. 1; B. -1 ; C. 8; D. -8 。
3. x, y, z 为正整数, 求 $\frac{10x^2 + 10y^2 + z^2}{xy + yz + xz}$ 的最小值。
4. 直线 $kx + 4y = 1$ 垂直于 $x = 2 - 3t, y = 1 + 4t$, 求 k . A. 3; B. -3 ; C. $\frac{1}{3}$; D. $-\frac{1}{3}$ 。
5. $f(x) = \cos(\omega x - \frac{\pi}{6})$ ($\omega > 0$), 且对任意 $x \in \mathbb{R}$ 恒有 $f(x) \leq f(\frac{\pi}{4})$, 求 ω 的最小值. A. $\frac{3}{2}$; B. 1; C. $\frac{1}{3}$; D. $\frac{2}{3}$ 。
6. 【排除退化】椭圆 $C: \frac{x^2}{4} + \frac{y^2}{4b^2} = 1$ ($b > 0$) 上有点 $P(x_0, y_0)$, 其中 $y_0 \neq 0$. 过 P 作斜率分别为 $k, -k$ 的割线 ($k \neq 0$), 与椭圆的另一交点分别为 A, B , 且 P, A, B 互不相同. 求 k_{AB} , 并判断它是否依赖 k 。
7. 极坐标方程 $\rho^2 \cos \theta + \rho - 3\rho \cos \theta - 3 = 0$ 表示: A. 一个圆; B. 一个圆与一条直线; C. 两个圆; D. 两条直线。
8. $|\mathbf{a}| = |\mathbf{b}| = |\mathbf{c}| = 1$, $\mathbf{a} \cdot \mathbf{b} = \frac{1}{2}$, 求 $(\mathbf{a} + \mathbf{b}) \cdot (2\mathbf{b} - \mathbf{c})$ 的最小值. A. $3 + \sqrt{3}$; B. $3 - \sqrt{3}$; C. $2 + \sqrt{2}$; D. $2 - \sqrt{2}$ 。
9. 若 $(1 - x)^5 = a_0 + a_1x + \cdots + a_5x^5$, 求 $(a_2 + a_1)(a_1 + a_3 + a_5)$ 。
10. 一个密闭的正四面体容器, 先以一个面水平朝下, 装水至其高度的一半。将容器倒置, 使原来的顶点朝下、对面水平, 水不流失。求此时水深与容器原高之比。

11. 使方程 $3^{|x-3|} + (x-3)\sin(x-3) + k\cos(x-3) = 0$ 有唯一解的 k 有多少个? A. 不存在; B. 1 个; C. 2 个; D. 无穷多个。
12. 两个圆柱底面积为 S_1, S_2 , 体积为 V_1, V_2 , 侧面积相等。若 $\frac{V_1}{V_2} = \frac{3}{2}$, 求 $\frac{S_1}{S_2}$ 。
13. 双曲线 $\frac{x^2}{4} - \frac{y^2}{12} = 1$ 的焦点为 A, B , 点 C 在双曲线上, 且 $\cos \angle ACB = \frac{3}{5}$, 求 $\triangle ABC$ 周长。
14. $A = \{1, 2, \dots, 100\}$, $B = \{3x \mid x \in A\}$, $C = \{2x \mid x \in A\}$, 求 $B \cap C$ 的元素个数。
15. $f(x) = \frac{ax^2}{2} - (1+2a)x + 2\ln x$ ($a > 0$) 在 $(\frac{1}{2}, 1)$ 中有极大值, 求 a 的取值范围。A. $(1, 2)$; B. $(1, +\infty)$; C. $(2, +\infty)$; D. $(\frac{1}{e}, +\infty)$ 。
16. 【条件补全】 $k > 0$, 两个不同的圆均位于射线 $y = kx$ ($x \geq 0$) 与 x 轴正半轴所夹锐角内部, 并与两边相切。两圆半径满足 $r_1 r_2 = 2$, 且交于 $P(2, 2)$ 。求 k 。
17. 偶函数 f 满足 $f(x+4) = f(x) + 2f(2)$, 求 $f(2022)$ 。
18. 方程 $\sin(2022\pi x) = x^2$ 有多少个实根?
19. 求方程 $|\sin x| + |\cos x| = \frac{\pi}{6}$ 的根。
20. 【明确点序】双曲线的左右焦点为 F_1, F_2 。一条过 F_1 的直线与左、右两支分别交于 A, B , 且 F_1, A, B 依次排列。若 $2AF_1 = AB$, $\angle F_1 A F_2 = 120^\circ$, 求离心率。
21. 设 $f(x) = |x+1| + |x| - |x-2|$, 求方程 $f(f(x)) + 1 = 0$ 的根的个数。A. 1; B. 2; C. 3; D. 0。

22. M 为 $\triangle ABC$ 所在平面上一点, $\overrightarrow{AM} = \frac{2}{3}\overrightarrow{AB} + \frac{1}{4}\overrightarrow{AC}$, 求 $\frac{S_{\triangle ABM}}{S_{\triangle BCM}}$ 。A. 3; B. 8; C. $\frac{8}{3}$; D. $\frac{3}{8}$ 。
23. 设 $A = \{(x, y) \mid x^2 + y^2 \leq 2, x, y \in \mathbb{Z}\}$, 求 A 的元素个数。A. 4; B. 5; C. 8; D. 9。
24. 计算 $\tan 15^\circ + 2\sqrt{2}\sin 15^\circ$ 。A. $\sqrt{3}$; B. $\sqrt{2}$; C. 2; D. 1。
25. 空间中到正方体 $ABCD - A_1B_1C_1D_1$ 的棱 A_1D_1, AB, CC_1 距离相等的点有多少个? A. 无数; B. 0; C. 2; D. 3。
26. 若 $a > b > 0$, 求 $a + \frac{4}{a+b} + \frac{1}{a-b}$ 的最小值。A. $2\sqrt{3}$; B. $\frac{3\sqrt{10}}{2}$; C. $3\sqrt{2}$; D. 4。
27. 对非零、非常数的实系数多项式 $f(x), g(x)$, 判断命题“ $f(x)$ 是 $g(x)$ 的因式”是命题“ $f(f(x))$ 是 $g(g(x))$ 的因式”的何种条件, 并给出证明或反例。
28. 【多选并证明】两个集合之间存在一一对应时, 称它们等势。下列哪些集合等势? A. $[0, 1]$ 与 $\{t \in \mathbb{R} \mid 0 \leq t \leq 1\}$; B. $[0, 1]$ 与 $\{a, b, c, d\}$; C. $(0, 1)$ 与 $[0, 1]$; D. $\{1, 2, 3\}$ 与 $\{a, b, c, d\}$ 。其中 a, b, c, d 互不相同; 对 C 给出一个具体的一一对应。
29. $f(x) = \ln x - mx^2 + (1 - 2m)x + 1$ 。若对任意 $x > 0$ 均有 $f(x) \leq 0$, 求整数 m 的最小值。
30. 【教学改编】圆锥顶点为 P , 底面圆心为 O , A 在底面圆上, $PO \perp$ 底面, $OA = 2\sqrt{2}, PA = 4$ 。点 B 在底面圆盘内, 且 $B \neq O, A, OB \perp BA$; 作 $OH \perp PB$ 于 H 。求三棱锥 $P - HOA$ 体积的最大值。

31. 数列 $\{a_n\}$ 满足 $a_1 = 2, a_2 = 6, a_{n+2} - 2a_{n+1} + a_n = 2$, 求 $\sum_{i=1}^{2022} \frac{1}{a_i}$ 。
32. 【条件补全】椭圆 $\frac{x^2}{a^2} + \frac{y^2}{9} = 1$ ($a > 3$) 存在一条不平行于 y 轴的非退化弦 AB , 其中垂线过 $(-\frac{a}{5}, 0)$ 。求离心率的取值范围, 并说明充分性。
33. 椭圆 $\frac{x^2}{4} + y^2 = 1$ 的左右焦点分别为 F_1, F_2 , 点 P 在直线 $x + 2\sqrt{3}y - 4\sqrt{3} = 0$ 上。当 $\angle F_1PF_2$ 最大时, 求 $\frac{PF_1}{PF_2}$ 。A. $\frac{\sqrt{15}}{3}$; B. $\frac{3}{5}$; C. $\frac{5}{3}$; D. $\frac{\sqrt{15}}{5}$ 。
34. 在 $\triangle ABC$ 中, $A = 3B = 9C$, 求 $\cos A \cos B + \cos B \cos C + \cos C \cos A$ 。A. $\frac{1}{4}$; B. $-\frac{1}{4}$; C. $\frac{1}{3}$; D. $-\frac{1}{3}$ 。
35. 8 个不同的点把半圆分成 9 段弧。以这 10 个点 (含两个端点) 为顶点的三角形中, 钝角三角形有多少个? A. 55; B. 112; C. 156; D. 120。
36. $a_0 = \frac{1}{4}, a_{n+1} = a_n^2 + a_n$, 求 $\left\lfloor \sum_{i=0}^{2022} \frac{1}{a_i + 1} \right\rfloor$ 。A. 1; B. 2; C. 3; D. 4。
37. $f(x) = |x| + 2x + 1 + 3^x$ 的反函数为 $g(x)$, 求方程 $(g(x^2))^2 = 1$ 的根的个数。A. 1; B. 2; C. 3; D. 4。
38. $\lim_{x \rightarrow 2} \frac{f(5-x) - 3}{x - 2} = 2, f(3) = 3$, 求 f 在点 $(3, f(3))$ 处的切线方程。A. $2x + y + 9 = 0$; B. $2x + y - 9 = 0$; C. $-2x + y + 9 = 0$; D. $-2x + y - 9 = 0$ 。
39. 【教学改编】单位正方体 $ABCD - A_1B_1C_1D_1$ 中, M 是 C_1D_1 的中点, β 为过 B, D_1, M 的平面。点 P 在平面 β 与正方体的公共部分内 (含边界)。求直线 A_1P 与平面 B_1BCC_1 所成角的正切值的最大值, 并确定取等时的 P 。