

2020 年上海交通大学数学笔试

校订教学版：标有“教学改编”“补全”等字样的题目包含编者修订，不作为原卷逐字复原。

1. 已知函数 $f(x)$ 的定义域为 $(0, 1)$ ，若 $c \in (0, \frac{1}{2})$ ，则函数 $g(x) = f(x+c) + f(x-c)$ 的定义域为_____。
2. 已知方程 $2^x - \sin x = 1$ 。判断：(1) 方程没有正数解；(2) 方程有无数多个实数解；(3) 方程恰有一个正数解；(4) 方程的所有实根均小于 1。其中错误的判断有_____。
3. 小于 1000 的正整数中，既不是 5 的倍数也不是 7 的倍数的整数共有多少个？
4. 边长为 a 的正三角形 ABC 中， D, E 分别在 AB, BC 上，且 $AD = BE = \frac{1}{3}a$ 。连接 AE, CD ，则 AE 与 CD 的夹角为_____。
5. 已知 $A(3, 4), B(6, 0), C(-5, -2)$ ，求角 A 的平分线所在直线方程。
6. 从 2 个红球、3 个黑球、5 个白球（同色球完全相同）中任取 6 个，有多少种不同取法？
7. 曲线 $y = ax^2 + bx + c$ 过 $A(-3, 4), B(5, 4)$ ，求 $2a + b$ 。
8. 过抛物线 $y^2 = 2px$ ($p > 0$) 的焦点 F 作直线 m ，交抛物线于不同的两点 A, B 。若 A, B 横坐标之和为 5，讨论直线 m 的条数与 p 的关系。
9. 【条件明确】用同样大小的正 n 边形以边与整条边相接的方式，无重叠地铺满整个平面，求所有可能的 n ，并说明可以实现。
10. 三条直线 $l_1: x - 2y + 2 = 0$, $l_2: x = 2$, $l_3: x + ky = 0$ 将平面划分成 6 个部分，则 k 的可能取值情况是：A. 只有唯一值；B. 有两个不同的值；C. 有三个不同的值；D. 有无数个值。
11. 已知非零实数 a, b, c ，若 $\frac{bc}{a}, \frac{ac}{b}, \frac{ab}{c}$ 成等差数列，则一定成立的是：A. $|b| \leq |ac|$ ；B. $|b| \leq \frac{|a|+|c|}{2}$ ；C. $|b|^2 \geq |ac|$ ；D. $a^2 \leq b^2 \leq c^2$ 。
12. 函数 $f(x)$ 的定义域为 D 。若对任意 $x \in D$ ，都存在唯一的 $y \in D$ ，使 $f(x) + f(y) = 4$ ，则称 $f(x)$ 在 D 上的和为 4。判断下列函数中有几个满足条件：(1) $f(x) = \ln x$, $x \in [1/e, e^5]$ ；(2) $f(x) = x^2 - 1$, $x \in [-1, 6]$ ；(3) $f(x) = \frac{x}{x-1}$, $x < 1$ ；(4) $f(x) = xe^x$ 。
13. 若集合 M 中任意两个元素的和、差、积、商（除数不为 0）仍在 M 中，则称 M 为封闭集合。判断下列集合中哪些封闭：(1) $\mathbb{R}$ ；(2) $\mathbb{Q}$ ；(3) $\mathbb{R} \setminus \mathbb{Q}$ ；(4) $\{m + n\sqrt{2} \mid m, n \in \mathbb{Z}\}$ 。

14. 方程 $x(x+1)+1=y^2$ 有多少组正整数解?
15. 若 $a, b < 0$ 且 $\frac{1}{a} + \frac{1}{b} = \frac{1}{a-b}$, 求 $\frac{a}{b}$ 。
16. 若四面体各顶点到平面 α 的距离都相等, 则称 α 为该四面体的中位面。一个四面体有多少个中位面?
17. 设 $m(a)$ 是函数 $f(x) = |x^2 - a|$ 在 $[-1, 1]$ 上的最大值, 求 $m(a)$ 的最小值及相应的 a 。
18. 在正方体 8 个顶点中任取两点确定直线, 所得直线中异面直线共有多少对?
19. 若空间三条直线 a, b, c 两两异面, 则与三条直线都相交的直线有多少条?
20. 用平面截一个单位正方体, 若截面是六边形, 求此六边形周长的最小值。
21. 【按源解析图明确点序】矩形 $ABCD$ 的边 $AB = \sqrt{2}$ 。过 B, D 作 AC 的垂线, 垂足分别为 E, F , 且 $AF = FE = EC$ 。沿 AC 翻折矩形, 使二面角 $B-AC-D$ 成直角, 求 BD 。
22. 平面上给定五个点, 任意三点不共线。过任意两点作直线, 且任意两条直线既不平行也不垂直。过五点中任一点向另外四点的连线作垂线, 所有这些垂线的交点 (不含已知五点) 至多有多少个?
23. 若实数 a, b 满足 $(a+b)^{59} = -1$, $(a-b)^{60} = 1$, 求 $\sum_{n=1}^{60} (a^n + b^n)$ 。
24. 甲、乙、丙三人的职业分别是 A, B, C 。乙的年龄比从事职业 C 的人大, 丙的年龄和从事职业 B 的人不同, 从事职业 B 的人比甲年龄小。求甲、乙、丙的职业。
25. 求函数 $y = \frac{4 \sin x \cos x + 3}{\sin x + \cos x}$ 在 $x \in (-\frac{\pi}{4}, \frac{3\pi}{4})$ 上的最小值。