

2019 年上海交通大学自主招生数学试卷

综合题

校订教学版：标有“教学改编”“补全”等字样的题目包含编者修订，不作为原卷逐字复原。

1. $f(x) = a \sin x + b\sqrt[3]{x} + 4$, 且 $f(\lg \log_3 10) = 5$, 求 $f(\lg \lg 3)$ 。
2. $0 < a < 1, 0 < \theta < \pi/4$, 令 $x = (\sin \theta)^{\log_a \sin \theta}$, $y = (\cos \theta)^{\log_a \tan \theta}$, $z = (\sin \theta)^{\log_a \tan \theta}$, 比较 x, y, z 。
3. 方程 $x^4 + ax - 4 = 0$ 的各实根为 $x_1, \dots, x_k$ ($k \leq 4$)。若点 $(x_i, 4/x_i)$ 均在直线 $y = x$ 同侧, 求 a 的范围。
4. 复数 z 满足 $|z| = 1$ 且 $z^2 - 2az + a^2 - a = 0$, 求负实数 a 。
5. 若 $x^3 - 3x^2 + (m+2)x - m = 0$ 的三个根可作为三角形三边长, 求 m 的范围。
6. $m, n \in \mathbb{Z}^+$, 若 $(\sqrt{3} + i)^m = (1 - i)^n$, 求 $n - m$ 的最小值。
7. $x_1 = \sqrt[3]{3}$, $x_n = (x_{n-1})^{\sqrt[3]{3}}$ 。若 $x_n \in \mathbb{Z}$, 求 n 的最小值。
8. 设 $(x - \sqrt{2})^{2019}$ 展开式中 x 的奇次幂项之和为 $S(x)$, 求 $S(\sqrt{2})$ 。
9. x, y, z 不全为零, 求 $\frac{xy + 2yz}{x^2 + y^2 + z^2}$ 的最大值。
10. $S_{\triangle ABC} = 2$, $D \in AB, E \in AC, F \in DE$, 且 $AD/AB = x, AE/AC = y, DF/DE = z$ 。若 $y + z - x = 1$, 求 $S_{\triangle BDF}$ 的最大值。
11. 【条件补全, 多选】若对定义域内任意 x, y , 有 $f((x+y)/2) \leq (f(x) + f(y))/2$, 称 f 为凸函数。判断哪些函数满足条件: A. 2^x ; B. x^3 ; C. $\log_2 x$; D. $f(x) = x$ ($x \leq 0$), $f(x) = 2x$ ($x > 0$)。各函数取自然定义域。
12. 复数 z_1, z_2 对应点为 A, B 。若 $|z_1| = 4$ 且 $4z_1^2 - 2z_1z_2 + z_2^2 = 0$, 求 $\triangle AOB$ 面积。
13. 实数 a, b 满足 $4a^2 - 5ab + 4b^2 = 19$, 求 $a^2 + b^2$ 的最大值。
14. 在 $\triangle ABC$ 中, $a + c = 3b$, 求 $\tan \frac{A}{2} \tan \frac{C}{2}$ 。
15. a_n 为 7^n 的末两位数, 求 $a_1 + \dots + a_{2019}$ 。

16. 【教学改编】 O 为非退化三角形 ABC 的外心，外接圆半径为 R ， O 到边 BC, CA, AB 所在直线的距离依次为 k, m, n 。证明 $k : m : n = |\cos A| : |\cos B| : |\cos C|$ ；并说明对非直角三角形，何时可以去掉三个绝对值。

17. 定义 $(m, n), (a, b)$ 的折线距离为 $|m - a| + |n - b|$ 。平面上一点 P 到下列各点的折线距离之和最小：

$$(-1, 2), (3, 1), (3, 5), (-2, 4), (4, 4), (6, 6).$$

求 P 的坐标。

18. $A = \{(x, y) \mid y \geq x^2\}$, $B = \{(x, y) \mid x^2 + (y - a)^2 \leq 1\}$ 。求 $A \cap B = B$ 的充要条件。选项：
 $a = 5/4$; $a \geq 5/4$; $a \geq 1$; $0 < a < 1$ 。