2026 年北京大学强基计划数学试题

1. 已知圆内接四边形 $AB = BC = CD = 1$，$\angle B = 120^\circ$，求 AD 的长。

2. 若复数 z 满足 $|z| = |z - (2 + 2i)| = 3$，求满足题意的所有复数 z 的乘积。

3. 求同余方程 $x^2 \equiv 1 \pmod{30^{2024}}$ 的解的个数。

4. 已知 $xy + yz + zx = -4$，求 $|x| + |y| + |z|$ 的最小值。

5. 求单位圆上正 2026 边形的一个顶点到另外 2025 个顶点的距离的乘积。

6. 若 $x + y = \sqrt{2x + 1} + \sqrt{2y + 1}$，求 $x + y$ 的最大值。

7. 已知 $\dfrac{\sin A + \sqrt{3}\cos A}{\cos A - \sqrt{3}\sin A} = \tan\dfrac{7\pi}{12}$，求 $\sin 2B + 2\cos C$ 的取值范围。

8. 若定义在实数域上的函数 $f(x)$ 的图像绕原点旋转 90° 后与自身重合，求其不动点的个数。

9. 实数 x, y 满足 $x^2 + y^2 + xy = 1$，求 $x - y$ 的最大值。

10. 已知椭圆 $\dfrac{x^2}{4} + y^2 = 1$，点 $P(a, 0)$，过 P 作椭圆的两条切线互相垂直，求 a 的值。

11. 已知实数 a,b,c 的绝对值均不小于 1，$f(x)=x+\dfrac{1}{x}$。若 $f(a)+f(b)+f(c)=0$，求 $a+b+c$ 的最小值。

12. 正四面体的棱长为 1，求其对棱中点的距离。

13. 已知正实数列 $\{a_n\}$ 满足 $a_1=1$，当 $n\geq 2$ 时，$a_n+\dfrac{2}{a_n}=2S_n$（S_n 为前 n 项和），求 a_{2026} 的整数部分。

14. 已知复数 z 满足 $z^5=\overline{z}$，求满足该方程的复数 z 的个数。

15. 已知集合 $M=\{1,2,\ldots,2026\}$，从 M 中选取四个数组成公差不为 0、长度为 4 的等差数列，求这样的等差数列的个数。

16. 已知 $p^3+q^4+r^3=-3$，(p,q,r) 为质数数组，求所有满足条件的质数数组 (p,q,r)。

17. 已知 p,q 为非负整数，二次函数 $f(x)=x^2+px+q$ 有零点；若正数 a,b 满足 $f(a)<f(b)\leq 1.1001f(a)$，求 $b-a$ 的最大值的整数部分。

18. 已知方程 $x^4+ax^3+bx^2+ax+1=0$（$a,b\in\mathbb{R}$）的四个根均为正数，求 b 的取值范围。

19. 已知椭圆 $\dfrac{x^2}{9}+\dfrac{y^2}{4}=1$，$F$ 为椭圆右焦点，P 为椭圆上动点，求 $|OP|\cdot|OF|$ 的最大值。

20. 已知数列 $\{a_n\}$ 满足 $a_0=0$，$a_1=1$；对任意整数 $n\geq 2$，存在 $k\in\{1,2,\ldots,n\}$，使得 a_n 是 $a_{n-1},a_{n-2},\ldots,a_{n-k}$ 这 k 项的算术平均数，求 $a_{2026}-a_{2025}$ 的最小值。