

2023 年北京大学数学笔试

说明：校订教学版：第 8、12、13 题补全条件与计数约定；来源原稿及修改说明另存。

1. 定义有理复数为实部、虚部均为有理数的复数，无理复数为实部、虚部均为无理数的复数，半有理复数为实部、虚部一有理一无理的复数。若三角形三个顶点对应的复数均为半有理复数，则重心对应的复数是：A. 只能是有理复数或半有理复数；B. 只能是无理复数或半有理复数；C. 只能是半有理复数；D. 以上都不对。
2. 方程 $1 + \cos x + i \sin x - \cos 2x - i \sin 2x + \cos 3x + i \sin 3x = 0$ 在 $[0, 2\pi]$ 上有多少个解？
3. 数列 $\{a_n\}$ 满足 $a_1 = \frac{5}{2}$, $a_{n+1} = a_n^2 - 2$, 求 $[a_{2023}]$ 除以 7 的余数。A. 1; B. 2; C. 4; D. 以上都不对。
4. $U = \{1, 2, \dots, 10\}$, 求 U 中元素两两互素的三元子集个数。
5. 函数 $f(x) = \min\{\sin x, \cos x, -\frac{1}{\pi}x + 1\}$ 在 $[0, \pi]$ 上的最大值是多少？
6. $U = \{1, 2, \dots, 366\}$, 其中互不相交且各元素之和为 17 的倍数的二元子集最多有多少个？
7. 方程 $24x^5 - 15x^4 + 40x^3 - 30x^2 + 120x + 1 = 0$ 有多少个实根？
8. 凸十边形内任意三条对角线不在其内部交于同一点。所有对角线把十边形划分为多少个区域？
9. 一个三角形的一条高为 2, 另一条高为 4, 求其内切圆半径的取值范围。
10. $R(n)$ 表示正整数 n 除以 2, 3, 4, 5, 6, 7, 8, 9, 10 的余数之和。满足 $R(n) = R(n+1)$ 的两位数 n 有多少个？
11. 正整数 $a < b < c < d \leq 101$, 且 $101 \mid a + b + c + d$, 求有序数组 (a, b, c, d) 的个数。

12. 【条件补订】点 $C \in \{(x, y) \mid x^2 + y^2 = 1, y \geq 0\}$, $A(-1, 0), B(1, 0)$, 且 $C \neq A$ 。点 D 在射线 AC 上, C 在线段 AD 上, $|CD| = 3|BC|$ ($C = B$ 时约定 $D = B$)。求 D 到 $E(4, 5)$ 距离的最大值与最小值之积。
13. 三个互不相等的正整数最大公约数为 20、最小公倍数为 20000, 求这样的无序三元组个数。
14. 由 $\left\lfloor \frac{1^2}{2023} \right\rfloor, \left\lfloor \frac{2^2}{2023} \right\rfloor, \dots, \left\lfloor \frac{2023^2}{2023} \right\rfloor$ 构成的集合有多少个元素?
15. 设 $S = \{(-1, 0), (1, 0), (0, 1), (0, -1)\}$ 。甲虫第 1 天在 origin; 第 $n+1$ 天从第 n 天位置出发, 沿向量 $\frac{1}{4^n} \mathbf{v}$ 移动, 其中 $\mathbf{v} \in S$ 。 S_n 表示第 n 天可能位置的个数, 求 S_{2023} 。
16. 方程 $x[x] = 6$ 有多少个解?
17. 正整数 x, y, z 满足 $\frac{x(y+1)}{x-1}, \frac{y(z+1)}{y-1}, \frac{z(x+1)}{z-1}$ 均为正整数, 求 xyz 的最大值与最小值之和。
18. 已知 $a < b < c < d$, x, y, z, t 是 a, b, c, d 的一个排列。式子 $(x-y)^2 + (y-z)^2 + (z-t)^2 + (t-x)^2$ 能得到多少个不同的值?
19. 正整数 $x_1 < x_2 < \dots < x_9$ 且 $x_1 + \dots + x_9 = 220$ 。在 $x_1 + \dots + x_5$ 取最大值时, 求 $x_9 - x_1$ 的最大值。
20. 50 支队伍进行排球单循环比赛, 胜一局积 1 分、负一局积 0 分。任取 27 支队伍, 都能找到一支全胜其余 26 支队伍的队和一支全负于其余 26 支队伍的队。求这 50 支队伍最少有多少种不同积分。