

2022 年北京大学强基计划数学试题

1. 满足 $2n+1$ 和 $3n+1$ 都是完全平方数, 且 $n \leq 2022$ 的整数 n 有多少个?
(A) 11 (B) 12 (C) 13 (D) 以上都不对。
2. 凸四边形 $ABCD$ 满足 $\angle ABD = \angle BDC = 50^\circ$ 、 $\angle CAD = \angle ACB = 40^\circ$ 。求符合题意且互不相似的凸四边形 $ABCD$ 的个数。
3. 求不超过 2022 且满足 $100 \mid (2^y + y)$ 的正整数 y 的个数。
4. 用 $[x]$ 表示不超过 x 的整数。已知 $\alpha = \frac{\sqrt{5}+1}{2}$, 求 $[\alpha^{12}]$ 。
(A) 321 (B) 322 (C) 323 (D) 以上都不对。
5. 已知六位数 $\overline{y_1y_2f_3f_4d_5d_6}$ 满足 $\frac{\overline{y_1y_2f_3f_4d_5d_6}}{\overline{f_4d_5d_6}} = (1 + \overline{y_1y_2f_3})^2$, 求所有满足条件的六位数之和 ($\overline{f_4d_5d_6}$ 不必为三位数)。
6. 已知整数 a, b, c, d 满足 $a + b + c + d = 6$, 求 $ab + ac + ad + bc + bd + cd$ 的正整数取值个数。
7. 有内切圆的凸四边形 $ABCD$ 满足 $AB = 1, BC = 2, CD = 4, DA = 3$, 求其内切圆半径的取值范围。
8. 已知 $a, b \in \mathbb{R}$, $z_1 = 5 - a + (6 - 4b)i$ 、 $z_2 = 2 + 2a + (3 + b)i$ 、 $z_3 = 3 - a + (1 + 3b)i$ 。当 $|z_1| + |z_2| + |z_3|$ 最小时, 求 $3a + 6b$ 。
9. 已知复数 z , $z/2$ 与 $2/\bar{z}$ 的实部和虚部均属于 $[-1, 1]$, 求 z 在复平面上形成轨迹的面积。
10. 在 $\triangle ABC$ 中, $S_{\triangle ABC} = \frac{c}{2}(a-b)$, 外接圆半径 $R = 2$, 且 $4(\sin^2 A - \sin^2 B) = (\sqrt{3}a - b)\sin B$ 。
求 $\sin \frac{A-B}{2} + \sin \frac{C}{2}$ 。

11. 在梯形 $ABCD$ 中, $AD \parallel BC$, M 在边 CD 上, 且 $\angle ABM = \angle CBD = \angle BCD$ 。求 AM/BM 的取值范围。
12. 方程 $\sqrt{1-x^2} = 4x^3 - 3x$ 的所有实根个数与所有实根乘积之比为多少?
13. 若十进制数 $A = \overline{a_0 a_1 \cdots a_n}$, 记 $D(A) = a_0 + 2a_1 + 2^2 a_2 + \cdots + 2^n a_n$ 。已知 $b_0 = 2033^{10}$ 、 $b_{n+1} = D(b_n)$, 求 b_{2022} 各位数字的平方和。
14. 数列 $\{a_n\}$ 满足 $a_1 = 12$, $a_{n+1} = \frac{1}{4}(3 + a_n + 3\sqrt{1+2a_n})$, 求最接近 a_{10} 的整数。
15. 已知 $f(x)$ 是二次函数, $f(-2) = 0$, 且对任意 $x \in \mathbb{R}$ 都有 $2x \leq f(x) \leq \frac{x^2+4}{2}$, 求 $f(10)$ 。
16. 数列 $\{a_k\}_{1 \leq k \leq 5}$ 各项均为正整数, 且 $|a_{k+1} - a_k| \leq 1$ 。若数列中存在一项为 3, 求可能数列的个数。
17. 将不大于 12 的正整数分为 6 个两两交集为空的二元集合, 且每个集合中两个元素互质, 求不同分法的种数。
18. 已知 y, f, d 为正整数, $F(x) = (1+x)^y + (1+x)^f + (1+x)^d$ 中 x 的系数为 10, 求 x^2 系数的最大可能值与最小可能值之和。
19. 若 $\triangle ABC$ 三边长为等差数列, 求 $\cos A + \cos B + \cos C$ 的取值范围。
20. 内接于椭圆 $\frac{x^2}{4} + \frac{y^2}{9} = 1$ 的菱形, 其周长的最大值与最小值之和为多少?
 (A) $4\sqrt{13}$ (B) $14\sqrt{13}$ (C) $\frac{110}{3}\sqrt{13}$ (D) 上述三个选项都不对。