

2021 年北京大学暑期学堂数学试卷

综合题

1. 函数 $f(x) = 3x \ln x + x^3 - ax + 5$ 在 $(0, +\infty)$ 上非负, 求 a 的最大值。
2. 平面内有定圆 C 和动圆 Γ 。动圆 Γ 与定圆 C 内切, 且恒过 C 内不为圆心的一点, 求 Γ 的圆心轨迹。
3. 已知 $2x - 5y \leq -6$, $3x + 6y \leq 25$, 求 $9x + y$ 的最大值。
4. 已知 $0 < x < y < \frac{\pi}{2}$, 且满足 $\sin(\cos x) = x$, $\cos(\sin y) = y$, 求有序数对 (x, y) 的组数。
5. 已知 $x^2 + 4y^2 = 1$, 求 $(x + 2y)(x - y)$ 的最小值。
6. 若 $4x^2 + 2xy + y^2 - 2ax - ay + 2 \geq 0$ 对任意 $x, y \in \mathbb{R}$ 恒成立, 求 a 的最大值。
7. 复数 $x_1, x_2, \dots, x_{2021}$ 是方程 $x^{2021} = 1$ 的 2021 个相异根, 求 $\sum_{j=1}^{2021} \frac{1}{1 + ix_j}$ 。
8. 数列 $\{a_n\}$ 中, $a_1 = 1, a_2 = 2, a_3 = 3$, 且当 $n \geq 3$ 时, $a_{n+1} = \prod_{i=1}^n a_i - 1$ 。记
$$S_n = \sum_{i=1}^n a_i^2 - \prod_{i=1}^n a_i,$$
求 S_{2021} 。
9. 求和式 $\sum_{i=1}^{999999} i^{2021}$ 的计算结果最后三位数字。
10. 实数 $50(7 + 4\sqrt{3})^{2021}$ 的十进制小数表示中, 个位数字与十位数字之和是多少?
11. 设 $p \in \mathbb{R}$, 方程 $z^3 + pz + 8i = 0$ 的三个根在复平面构成一个等边三角形的三个顶点, 求该等边三角形的面积。

12. 已知

$$\frac{(2x+1)^{4042}}{(x+1)^{2021}} = \sum_{i=0}^{2021} a_i x^i + \frac{1}{(x+1)^{2021}} \sum_{j=0}^{2020} b_j x^j$$

对任意实数 $x \neq -1$ 均成立, 求 a_{2020} 。

13. 已知 x, y, z, w 满足

$$(1 + \sqrt{2} + \sqrt{3} + \sqrt{6})(x + \sqrt{2}y + \sqrt{3}z + \sqrt{6}w) = 2021,$$

求有理数对 (x, y, z, w) 的对数。

14. 用 $[x]$ 表示实数 x 的整数部分, 用 $\{x\}$ 表示实数 x 的小数部分。求不等式

$$1 - [\sqrt{n^2 + 1} + n] \cdot \{\sqrt{n^2 - 1} + n\} < 10^{-6}$$

的最小整数解。

15. 已知 a, b, c 为三角形三边长, 求 $\frac{ab + bc + ca}{(a + b + c)^2}$ 的取值范围。

16. 设 $\frac{1}{2021}$ 有 m 种方式分为三个正整数的倒数之和, 有 n 种方式分为三个正奇数的倒数之和, 则 ()。

A. $m = n = 1$;

B. $m \leq 6, n \geq 1$;

C. $m = 3, n = 1$;

D. 以上均不正确。

17. 已知 $\alpha, \beta \in (0, \frac{\pi}{2})$, $\alpha + \beta + \gamma = \pi$, 且 $\sin \alpha = \alpha \sin \beta$, 求 β 与 γ 的大小关系。

18. 方程 $\sqrt{x} + \sqrt{y} = 2 + \sqrt{x+y}$ 的整数解有多少组?

19. 实数 x, y 满足 $(4x^3 - 3x)^2 + (4y^3 - 3y)^2 = 1$, 求 $x + y$ 的最大值。

20. 集合 $\{1, 2, \dots, 2021\}$ 的非空子集中, 元素和为 3 的倍数的集合有多少个?