

## 2021 年北京大学强基计划数学笔试

说明：校订说明：第 5 题明确允许退化二次曲线，第 14 题明确随机配对模型，第 16 题补明平面互异及夹角含义。

1. 已知  $O$  为  $\triangle ABC$  的外心，且  $O, B, C$  不共线。直线  $AB, AC$  与  $\triangle OBC$  的外接圆分别再次交于  $D \neq B, E \neq C$ 。若  $DE = OA$ ，求  $\angle OBC$ 。
2. 求方程  $y^3 + f^4 = d^5$  的正整数解  $(y, f, d)$  的组数。
3. 若实数  $a, b, c, d$  满足  $ab + bc + cd + da = 1$ ，求  $a^2 + 2b^2 + 3c^2 + 4d^2$  的最小值。
4. 已知  $Y = \sum_{i=0}^{2021} \left\lfloor \frac{2^i}{7} \right\rfloor$ ，求  $Y$  的个位数字。
5. 平面上有 100 条二次曲线（允许退化为两条直线），这些曲线最多把平面分成多少个连通区域？
6. 已知  $x_0 \in [0, 1]$ ，数列满足：若  $x_{n-1} < \frac{1}{2}$ ，则  $x_n = 2x_{n-1}$ ；若  $x_{n-1} \geq \frac{1}{2}$ ，则  $x_n = 2x_{n-1} - 1$ 。若  $x_0 = x_{2021}$ ，求可能的  $x_0$  个数。
7. 设  $y_n = \underbrace{122 \cdots 21}_{n \text{ 个数字}}$ ，若  $10^9 - 1 \mid y_n$ ，求  $n$  的最小值。
8. 已知  $a, b, c$  是三个不全相等的实数，且  $a = ab + c$ 、 $b = bc + a$ 、 $c = ca + b$ ，求  $a + b + c$ 。
9. 在  $\triangle ABC$  中， $AD$  为  $\angle A$  的平分线。过  $A$  作  $AD$  的垂线  $AH$ ，过  $C$  作  $CE \parallel AD$  交  $AH$  于  $E$ 。若  $BE$  与  $AD$  交于  $F$ ，且  $AB = 6, AC = 8, BC = 7$ ，求  $CF$ 。
10. 若一个十位数的各位数字之和为 81，称其为“筑梦数”。求筑梦数的个数。

11. 设  $a_n$  是与  $\sqrt{n/2}$  的差的绝对值最小的整数,  $b_n$  是与  $\sqrt{2n}$  的差的绝对值最小的整数。记  $\{1/a_n\}$  的前  $n$  项和为  $S_n$ ,  $\{1/b_n\}$  的前  $n$  项和为  $T_n$ , 求  $2T_{100} - S_{100}$ 。
12. 求满足  $n \leq 2021$  且  $n^5 - 5n^3 + 4n + 7$  为完全平方数的正整数  $n$  的个数。
13. 求方程  $x^2 - 2xy + 3y^2 - 4x + 5 = 0$  的整数解组数。
14. 现有一一对应的 7 把钥匙和 7 把锁, 将钥匙与锁等概率随机一一配对, 各试开一次。求指定的三把钥匙  $D_1, D_2, D_3$  均不能打开所配锁的概率。
15. 正整数  $m, n$  均不大于 2021, 且  $\frac{m}{n+1} < \sqrt{2} < \frac{m+1}{n}$ , 求数组  $(m, n)$  的个数。
16. 有三个给定的、两两不同且均过原点的平面。再过原点作平面  $\alpha$ , 使其与前三个平面的夹角 (取  $[0, \pi/2]$  中的角) 均相等, 求这样的  $\alpha$  的个数。
17. 若  $a, b, c$  为非负实数, 且  $a^2 + b^2 + c^2 - ab - bc - ca = 25$ , 求  $a + b + c$  的最小值。
18. 数列  $\{a_n\}$  满足  $a_1 = 2, a_{n+1} = 2^{a_n}$ ; 数列  $\{b_n\}$  满足  $b_1 = 5, b_{n+1} = 5^{b_n}$ 。若正整数  $m$  满足  $b_m > a_{25}$ , 求  $m$  的最小值。
19. 若  $x_1, x_2, \dots, x_7$  为非负整数, 求方程  $x_1 + x_2 + \dots + x_7 = x_1 x_2 \dots x_7$  的解组数。
20. 已知  $a, b, c \in \mathbb{R}^+$ , 且  $(a + b - c)(1/a + 1/b - 1/c) = 3$ 。求  $(a^4 + b^4 + c^4)(1/a^4 + 1/b^4 + 1/c^4)$  的最小值。