

2020 年北京大学强基计划测试

1. 已知正数 x, y, z, w 满足 $x \geq y \geq w$, $x + y \leq 2(w + z)$, 则 $\frac{w}{x} + \frac{z}{y}$ 的最小值为 () A. $\frac{3}{4}$ B. $\frac{7}{8}$
C. 1 D. 其他
2. 从正整数 $(2019 \times 2020)^{2021}$ 的约数中选出若干个, 使其中任意两个数的乘积都不是完全平方数, 则至多能选出 () 个。A. 16 B. 31 C. 32 D. 其他
3. 数列 $\{a_n\}$ 满足 $a_1 = 1$, $a_2 = 4$, 且对 $n \geq 2$ 有 $a_n^2 - a_{n-1}a_{n+1} = 2^{n-1}$, 则 a_{2020} 的个位数字为 () A. 8 B. 4 C. 2 D. 其他
4. 已知 a, b, c, d 是方程 $x^4 + 2x^3 + 3x^2 + 4x + 5 = 0$ 的四个根, 则
- $$\frac{a-1}{a+2} + \frac{b-1}{b+2} + \frac{c-1}{c+2} + \frac{d-1}{d+2}$$
- 的值为 () A. $-\frac{4}{3}$ B. $-\frac{2}{3}$ C. $\frac{2}{3}$ D. 其他
5. 等边三角形 ABC 的边长为 1。过点 C 作以 AB 为直径的圆的切线, 交直线 AB 的延长线于点 D , 且 $AD > BD$, 则 $\triangle BCD$ 的面积为 () A. $\frac{6\sqrt{2}-3\sqrt{3}}{16}$ B. $\frac{4\sqrt{2}-3\sqrt{3}}{16}$ C. $\frac{3\sqrt{2}-2\sqrt{3}}{16}$
D. 其他

6. 已知 x, y, z 均不等于 $\left(k + \frac{1}{2}\right)\pi (k \in \mathbb{Z})$, 且 $\sin(y+z-x), \sin(x+z-y), \sin(x+y-z)$ 成等差数列, 则下列一定成等差数列的是 () A. $\sin x, \sin y, \sin z$ B. $\cos x, \cos y, \cos z$ C. $\tan x, \tan y, \tan z$ D. 其他
7. 方程 $19x + 93y = 4xy$ 的整数解有 () 组. A. 4 B. 8 C. 16 D. 其他
8. 从圆 $x^2 + y^2 = 4$ 上任一点向椭圆 $C: \frac{x^2}{2} + y^2 = 1$ 引两条切线, 连接两个切点所得弦称为切点弦。椭圆 C 内部不与任何切点弦相交的区域面积为 () A. $\frac{\pi}{2}$ B. $\frac{\pi}{3}$ C. $\frac{\pi}{4}$ D. 其他
9. 对任意正数 x, y , 不等式 $5x + 12\sqrt{xy} \leq a(x + y)$ 恒成立, 则实数 a 的最小值为 () A. 8 B. 9 C. 10 D. 其他
10. 点 P 在单位正方体 $ABCD - A_1B_1C_1D_1$ 的表面上运动, 则 $PA_1 + PC_1$ 的最小值为 ()
 A. $\sqrt{2 + \sqrt{2}}$
 B. $\sqrt{2 + 2\sqrt{2}}$
 C. $2 - \frac{\sqrt{2}}{2}$
 D. 其他

11. 数列 $\{a_n\}$ 满足 $a_1 = 1$, $a_2 = 9$, $a_{n+2} = 4a_{n+1} - 3a_n - 20$, 其前 n 项和为 S_n , 则数列 $\{S_n\}$ 的最大值为 () A. 28 B. 35 C. 47 D. 其他

12. 直线 $y = 3x + m$ 与椭圆 $\frac{x^2}{25} + \frac{y^2}{16} = 1$ 交于 A, B 两点, O 为坐标原点, 则 $\triangle OAB$ 面积的最大值为 () A. 8 B. 10 C. 12 D. 其他

13. 对于正整数 $n \geq 3$, 若存在 $1 \leq k \leq n-1$, 使得 $\binom{n}{k-1}$, $\binom{n}{k}$, $\binom{n}{k+1}$ 成等差数列, 则称 n 为理想数。不超过 2020 的理想数共有 () 个。A. 40 B. 41 C. 42 D. 其他

14. 在 $\triangle ABC$ 中, $\angle A = 150^\circ$ 。点 $D_1, D_2, \dots, D_{2020}$ 将边 BC 等分为 2021 份。令

$$\alpha_1 = \angle BAD_1, \quad \alpha_2 = \angle D_1AD_2, \quad \dots, \quad \alpha_{2020} = \angle D_{2019}AD_{2020}, \quad \alpha_{2021} = \angle D_{2020}AC,$$

则

$$\frac{\sin \alpha_1 \sin \alpha_3 \cdots \sin \alpha_{2021}}{\sin \alpha_2 \sin \alpha_4 \cdots \sin \alpha_{2020}}$$

的值为 () A. $\frac{1}{1010}$ B. $\frac{1}{2020}$ C. $\frac{1}{2021}$ D. 其他

15. $\sqrt{3 + 2\sqrt{3}\cos\theta + \cos^2\theta} + \sqrt{5 - 2\sqrt{3}\cos\theta + \cos^2\theta + 4\sin^2\theta}$ 的最大值为 () A. $\sqrt{2 + \sqrt{3}}$
B. $2\sqrt{2 + \sqrt{3}}$ C. $\sqrt{2} + 2\sqrt{3}$ D. 其他

16. 方程

$$\sqrt{x+5-4\sqrt{x+1}} + \sqrt{x+2-2\sqrt{x+1}} = 1$$

的实数根的个数为 () A. 1 B. 2 C. 3 D. 其他

17. 凸五边形 $ABCDE$ 的对角线 CE 分别与对角线 BD 和 AD 交于点 F 和 G 。已知 $BF:FD = 5:4$, $AG:GD = 1:1$, $CF:FG:GE = 2:2:3$, $S_{\triangle CFD}$ 和 $S_{\triangle ABE}$ 分别为 $\triangle CFD$ 和 $\triangle ABE$ 的面积, 则 $S_{\triangle CFD}:S_{\triangle ABE}$ 的值等于 () A. $8:15$ B. $2:3$ C. $11:23$ D. 前三个答案都不对

18. 设 p, q 均为不超过 100 的正整数, 则有有理根的多项式 $f(x) = x^5 + px + q$ 的个数为 () A. 99 B. 133 C. 150 D. 前三个答案都不对

19. 满足对任意 $n \geq 1$ 有 $a_{n+1} = 2^n - 3a_n$ 且严格递增的数列 $\{a_n\}$ 的个数为 () A. 0 B. 1 C. 无穷多个 D. 前三个答案都不对

20. 设函数 $f(x, y, z) = \frac{x}{x+y} + \frac{y}{y+z} + \frac{z}{z+x}$, 其中 x, y, z 均为正实数, 则有 () A. f 既有最大值也有最小值 B. f 有最大值但无最小值 C. f 有最小值但无最大值 D. 前三个答案都不对