

2019 年北京大学寒假学堂测试

注：校订教学版。原回忆稿缺第 6 题，现明确教学补编；第 2、16 题补明对象与范围。原试题为 8 道选择题、6 道填空题和 7 道解答题。一、选择题

1. 已知两点 $A(0, -1), B(0, 2)$ ，点 P 在直线 $y = x$ 上，求 $|PB| - |PA|$ 的最大值。A. 3 B. $\sqrt{5}$
C. $\sqrt{3}$ D. 都不对
2. 【教学补订：明确整数参数与整点计数】当 m 遍历所有整数时，抛物线 $y = x^2$ 与直线 $y = 12 - mx$ 产生的不同整点交点共有 () 个 (同一点不重复计算)。A. 11 B. 12 C. 13 D. 14
3. 用 1, 2, 3, 4, 5 排成不重复的三位数，它们的和是 ()。A. 19980 B. 29970 C. 39960 D. 都不对
4. 已知复数 z 满足 $|z| = 1$ ，且有 $z^{17} + z = 1$ ，求 z 。A. $\frac{1}{2} \pm \frac{\sqrt{3}}{2}i$ B. $\frac{\sqrt{3}}{2} \pm \frac{1}{2}i$ C. $\frac{\sqrt{2}}{2} \pm \frac{\sqrt{2}}{2}i$
D. 都不对
5. $y = \sin x + 2019$ 与 $y = \frac{1}{2}x$ 交点个数为 ()。A. 1 B. 2 C. 3 D. 都不对

6. 【原第 6 题缺失，教学补编】实数 x, y, z 满足 $x + y + z = 0$ 、 $x^2 + y^2 + z^2 = 6$ ，求 $x^4 + y^4 + z^4$ 。
A. 9 B. 12 C. 18 D. 36

7. 已知 $0 < a < 1$ ， $\left(\frac{2a}{1+a^2}\right)^x + \left(\frac{1-a^2}{1+a^2}\right)^x = 1$ ，求 x 解的个数。A. 0 B. 1 C. 2 D. 无穷个

8. 求 $\cos 10^\circ \cos 50^\circ \cos 70^\circ$ 的值。A. $\frac{\sqrt{3}}{4}$ B. $\frac{\sqrt{3}}{8}$ C. $\frac{\sqrt{3}}{16}$ D. 都不对

二、填空题

9. 已知一个长方体的体积为 1，则该长方体的表面积最小为_____。

10. 已知 $z_n = (1+i)\left(1+\frac{i}{\sqrt{2}}\right)\left(1+\frac{i}{\sqrt{3}}\right)\cdots\left(1+\frac{i}{\sqrt{n}}\right)$ ，求 $|z_n|$ 。

11. 独立掷两次均匀六面骰子，点数分别记为 m, n ，求 $x^2 + mx + n = 0$ 有整数解的概率。

12. 已知 $z_1 = 1 + i, z_2 = -2 + 2i$, 在复平面内 $z_1 z_2 z_3$ 构成正三角形, 则 $z_3 =$ _____。

13. 已知 $A(-3, 0), B(0, 3)$, 点 P 在抛物线 $y^2 = 2x$ 上, 则 $\triangle ABP$ 面积的最小值为_____。

14. 求 $y = \frac{(x-1)^2}{x^2+1}$ 的递增区间。

三、解答题

15. 已知 $f(x) = \sqrt{5 + \sqrt{5 + \sqrt{5 + \sqrt{5 + x}}}}$, 求 $f(x)$ 图象与它的反函数图象交点的横坐标。

16. 【明确理想模型】将篮球视为球面, 点光源位于球外, 在不经光源的平面屏幕上观察影子。求证: 影子轮廓位于一条二次曲线上 (允许退化情形)。

17. 记复数 $z = x + iy$, 其中 $|x| + |y| \leq 1$, 求 $|z - 1 - i|$ 的最大值。

18. 已知点 $A(-1, 0), B(1, 0)$, 点 P 在直线 $x + y - 4 = 0$ 上, 求 $AP + BP$ 的最小值。

19. 已知椭圆 $\frac{x^2}{2} + y^2 = 1$, 点 $P\left(\frac{\sqrt{2}}{2}, \frac{\sqrt{3}}{2}\right)$ 在椭圆上, 椭圆过 P 的切线分别与 x 轴交于 A 点、与 y 轴交于 B 点, 点 D 为椭圆的上顶点, 求曲线 BDP 围成的面积。

20. 在单位正方体 $ABCD - A_1B_1C_1D_1$ 中, E, F 在线段 AC 上, G, H 在线段 B_1D_1 上, 且 $EF = a, GH = b$, 试求四面体 $E - FGH$ 的体积。

21. 已知 $\angle 1, \angle 2, \dots, \angle n$ 为凸 n 边形的一组外角, 均为锐角, 求证: $\sin \angle 1 + \sin \angle 2 + \dots + \sin \angle n > 4$ 。