

2019 年北京大学博雅计划测试

说明：校订教学版：第 6 题补正系数条件，第 11 题补观察模型，第 15 题补凸性，均在题内说明。

1. 从 $1, 2, 3, \dots, 20$ 中任选四个不同的数，求这四个数的最小公倍数的最大值。

2. 已知 $y = a \sin x$ 在 $[0, \pi/2]$ 区间与其反函数有 2 个交点，求 a 的范围。

3. 求函数 $f(x) = \frac{x}{\sqrt{1+x^2}} + \frac{1-x^2}{1+x^2}$ 的范围。

4. 若点 $\left(\frac{1}{2}, \frac{\sqrt{3}}{2}\right)$ 关于 $y = kx$ 的对称点在 $(x-2)^2 + y^2 = 1$ 上，则 $k =$ _____。

5. 已知 $x, y, z > 0$ ，求 $\frac{xyz}{(4x+1)(9x+y)(4y+z)(9z+1)}$ 的最大值。A. $\frac{1}{576}$ B. $\frac{1}{1024}$ C. $\frac{1}{1296}$
D. 以上选项均不对

6. 【教学补订】 已知正实数 a, b, c , 正实数 x, y, z 满足 $x + y + z = 1$, 求 $\frac{a^2}{x} + \frac{b^2}{y} + \frac{c^2}{z}$ 的最小值。
A. $3(a^2 + b^2 + c^2)$ B. $(a + b + c)^2$ C. $a^2 + b^2 + c^2$ D. 以上选项均不对

7. 6 名男生、4 名女生, 打羽毛球男女混双的不同比赛数有几种?

8. 点集 (x, y) 满足 $(x^2 + 4y^2 - 4)(4x^2 + y^2 - 1) \leq 0$, 求该区域的面积。

9. 已知 $n^3 + 2n^2 + 8n - 5 = a^3$, $n, a \in \mathbb{N}$, 求 (n, a) 的对数。A. 0 B. 1 C. 2 D. 以上选项均不对

10. 已知 $x_i = -1$ 或 $1, i = 0, 1, \dots, 2019, \sum_{i=0}^{2019} 2^i x_i = 2019$, 则 $\sum_{i=0}^{2019} x_i =$ _____. A. -2002
B. -2001 C. -2000 D. 以上选项均不对

11. 【补明观察模型】金字塔为正四棱锥，底面边长为 400 m 。在底面所在平面内，以底面中心为圆心、半径为 400 m 的圆周上等概率选取观察点（视为点状眼睛，不计遮挡以外的因素），则同时看到两个侧面的概率是（ ） A. $\frac{1}{2}$ B. $\frac{\sqrt{3}}{4}$ C. $\frac{1}{3}$ D. 以上选项均不对

12. 当 $x \in (0, 1)$ 时，比较 $\frac{\tan x}{x}, \frac{\tan^2 x}{x^2}, \frac{\tan x^2}{x^2}$ 的大小顺序。

13. 求方程 $x^3 - [x] = 3$ 的解的个数。 A. 0 B. 1 C. 2 D. 以上选项均不对

14. $1^3 + 2^3 + \cdots + n^3$ 的末位数字不可能为: A. 2 B. 4 C. 6 D. 以上选项均不对

15. 【补明凸性】平面凸四边形 $ABCD$ 中, $AB = BC = AC$, $\angle DAC = 10^\circ$, $\angle DCA = 20^\circ$, 求 $\angle BDC$ 。A. 60° B. 70° C. 75° D. 以上选项均不对

16. 已知 $a > b > 0$, $a^3 - b^3 = a^2 - b^2$, 求 $a + b$ 的取值范围。

17. $1 \cdot 1! + 2 \cdot 2! + \cdots + 672 \cdot 672!$ 除以 2019 的余数为 () A. 1 B. 2017 C. 2018 D. 以上选项均不对