

2018 年北京大学自主招生测试

1. 已知 $a \neq b$, 且 $a^2(b+c) = b^2(a+c) = 1$, 求 $c^2(a+b) - abc$. A. 2 B. 1 C. 0 D. 以上选项都不对
2. 整数 x, y 满足 $x \geq 3, y \geq 3$, 且 $\frac{2}{x} + \frac{2}{y} > 1$, 求这样的 (x, y) 有几组。
3. 已知 $f(a+b) = f(a) + f(b)$, $f(ab) = f(a)f(b)$ 对任意实数 a, b 成立, 则对于任意正整数 n , $f(n)$ 的可能性有 () 种。A. 1 B. 2 C. 无穷种 D. 以上选项都不对
4. 在 $\triangle ABC$ 中, $AB = 15, BC = 14, AC = 13$, 过 A 作 $AD \perp BC$ 于 D , 则 $\triangle ADB$ 与 $\triangle ADC$ 的内心距 $I_1 I_2$ 的长度为 ()。
5. 已知正实数 a, b 满足 $a + b = 1$, 则 $\frac{1}{a} + \frac{27}{b^3}$ 的最小值为 () A. $\frac{47 + 13\sqrt{13}}{2}$ B. $\frac{55 + 15\sqrt{13}}{2}$
C. 218 D. 以上选项都不对
6. $\triangle ABC$ 中, $a \cos B - b \cos A = \frac{c}{3}$, 求 $\frac{\tan A}{\tan B}$ 。A. 2 B. 1 C. $\frac{1}{2}$ D. 以上选项都不对

7. 已知数列 $\{a_n\}$ 满足 $a_1 = 2019$, $S_n = n^2 a_n$, 求 a_{2018} 。A. $\frac{1}{2019}$ B. $\frac{1}{1009}$ C. $\frac{1}{2018}$ D. 以上选项都不对
8. 正方体 $ABCD - A_1B_1C_1D_1$ 中, 底面 $A_1B_1C_1D_1$ 上有一点 M , 使 $\angle AD_1D = \angle D_1MD$, 则 M 的轨迹是 () A. 圆的一部分 B. 椭圆的一部分 C. 双曲线的一部分 D. 以上选项都不对
9. 已知 M 为椭圆 $\frac{x^2}{4} + y^2 = 1$ 上的动点, 求 $|3x + 4y - 12|$ 的取值范围。A. $[0, 12 + 2\sqrt{13}]$
B. $[12 - 2\sqrt{13}, 12 + 2\sqrt{13}]$ C. $[0, 12 - 2\sqrt{13}]$ D. 以上选项都不对
10. 已知数列 $\{a_n\}$ 为等差数列, $S_{10} = 0$, $S_{15} = 10$, 求 nS_n 的最小值。

11. 已知 $f(x) = ax^2 + bx + c$ ($a \neq 0$), 且 $f(x) = x$ 无实根, 设 $f_1(x) = f(x)$, $f_n(x) = f(f_{n-1}(x))$, 问 $f_{2018}(x) = x$ 的实根个数。A. 0 B. 2018 C. 4036 D. 以上选项都不对
12. 将 $(5 + 3\sqrt{3})^{2018}$ 化为十进制小数, 则其十分位、百分位、千分位的数码之和为 () A. 0 B. 9 C. 27 D. 以上选项都不对
13. 在三个正切均有定义的 $\triangle ABC$ 中, “ $\tan A + \tan B + \tan C > 0$ ” 是 “ $\triangle ABC$ 为锐角三角形” 的 () A. 充分条件 B. 必要条件 C. 充分必要条件 D. 以上选项都不对
14. $f(x) = a^{2x} - 4a^x - 1$, 其中 $x \in (-\infty, -1] \cup [2, +\infty)$, $a \in (0, 1) \cup (1, +\infty)$ 为参数。若 $f(x)$ 的最小值为 -5 , 求 a 的取值范围。
15. 椭圆 C_1 与双曲线 C_2 共焦点 F_1, F_2 , P 是 C_1, C_2 的一个交点且 $\angle F_1PF_2 = \frac{\pi}{3}$, 两个曲线离心率为 e_1, e_2 , 求 $\frac{1}{e_1} + \frac{1}{e_2}$ 的最大值。

16. 梯形 $ABCD$ 的下底为 BC ，内部有一个以 BC 上一点为圆心的半圆，与 AB, CD, AD 三条边的内部均相切，则 $|AB| + |CD| - |AD|$ () A. 是正数 B. 是负数 C. 正负性无法确定 D. 以上选项都不对
17. 已知 $f(t) = t^2 + 2t$ ，则 $f(x) + f(y) \leq 2$ 且 $f(x) \geq f(y)$ 所确定的 (x, y) 形成的可行域面积是 () A. 4π B. 2π C. π D. 以上选项都不对
18. 三棱锥 $P - ABC$ 中， $AB \perp AC$ ， PA 垂直平面 ABC 。已知 $AP = AB + AC$ ，求 $\angle APB + \angle BPC + \angle CPA$ 。
19. 已知椭圆 $\frac{x^2}{9} + \frac{y^2}{4} = 1$ 与圆 $x^2 + y^2 = 2$ ，在椭圆上取一点 M 作圆的切线，切点弦与坐标轴交于 P, Q ， O 为坐标原点，求 $S_{\triangle POQ}$ 的最小值。
20. 已知实数 a, b, c 满足 $a \neq 0$ 、 $a \leq 2b + 3c$ ， a, b, c 成等比数列，求 $\frac{b - 2c}{a}$ 的取值范围。