

2018 年北京大学博雅计划测试

1. 有 10 个不同的元素，每次独立、等概率、有放回地取一个，则在前五次内取到过相同元素的概率为（保留两位有效数字）（ ） A. 0.50 B. 0.55 C. 0.70 D. 以上选项都不对
2. (高斯函数的定义) $f(x) = [x[x]]$ ，记 $f(n) = a_n$ ($n \in \mathbb{N}^*$)，求 $\frac{a_n + 2018}{n}$ 的最小值。
3. 已知 n 的所有正因数的乘积等于 n^3 (n 为 $1 \sim 400$ 之间的正整数)，问 n 的个数（ ） A. 50 B. 51 C. 55 D. 以上选项都不对
4. 求使得 $\sin \sqrt{2} + \sin 2\sqrt{2} + \cdots + \sin n\sqrt{2} > 2$ 成立的正整数 n 的个数（ ） A. 0 B. 1 C. 无穷多个 D. 以上选项都不对

5. 已知非负实数 a, b, c 满足 $a + b + c = 3$, 求 $a + ab + abc$ 的最大值 () A. 3 B. 4 C. $3\sqrt{2}$
D. 以上选项都不对
6. 15 个人围坐在圆桌旁, 从其中任取 4 人, 两两不相邻的概率是 () A. $\frac{30}{91}$ B. $\frac{25}{91}$ C. $\frac{10}{91}$
D. 以上选项都不对
7. 已知互不相同的实数 $a_1, a_2, \dots, a_{2018}, b_1, b_2, \dots, b_{2018}$, 对任意 $i = 1, 2, \dots, 2018$, $(a_i + b_1)(a_i + b_2) \cdots (a_i + b_{2018}) = 2018$, 则对任意 $j = 1, 2, \dots, 2018$, 求 $(a_1 + b_j)(a_2 + b_j) \cdots (a_{2018} + b_j)$ 。
A. -2018 B. 2018 C. 0 D. 以上选项都不对
8. 记 S_n 表示边长为整数、周长为 n 且互不全等的三角形的个数, 求 $S_{2018} - S_{2015}$ 。 A. 3 B. 0
C. -3 D. 以上选项都不对

9. 已知 $z_1 = \sin \theta + i$, $z_2 = \cos \theta + 2i$, 求 $\frac{14 - |z_1 - iz_2|^2}{|z_1 + iz_2|}$ 的最小值。A. $\sqrt{3}$ B. $\sqrt{2}$ C. $\sqrt{5}$
D. 以上选项都不对
10. 已知 $P(x, y)$ 为 $\frac{x^2}{5} + \frac{y^2}{4} = 1$ 上的动点, 则 $\sqrt{x^2 - 2x + y^2 + 1} + \sqrt{y^2 - 2y + x^2 + 1}$ 的最小值为
() A. $2\sqrt{5} - 2$ B. $2\sqrt{5} - \sqrt{2}$ C. $2\sqrt{2} - \sqrt{5}$ D. 以上选项都不对
11. 求方程 $\sqrt[3]{15x - x^2 + 1} + \sqrt[3]{x^2 - 15x + 27} = 4$ 的实根数目。A. 2 B. 3 C. 4 D. 以上选项都不对
12. 在面积为 1 的 $\triangle ABC$ 中, 线段 AC, BC 上各有一点 D, E , 使得 $AD = \frac{1}{3}AC$, $CE = \frac{1}{3}BC$ 。记 P 为 AE, BD 的交点, 求四边形 $PDCE$ 的面积。A. $\frac{2}{9}$ B. $\frac{2}{7}$ C. $\frac{8}{27}$ D. 以上选项都不对

13. x, y 为实数, 问 $\sqrt{(x-9)^2+4} + \sqrt{x^2+y^2} + \sqrt{(y-3)^2+9}$ 的最小值属于以下哪个区间 ()
 A. $[10, 11]$ B. $(11, 12]$ C. $(12, 13]$ D. 以上选项都不对
14. 已知 a, b, c 为公差为 0 的等差数列, P, N 的坐标分别为 $(-3, 2), (2, 3)$, 过 P 向直线 $ax+by+c=0$ 做垂线, 垂足为 M , 求 $|MN|$ 的最大值与最小值的乘积。A. 10 B. $3\sqrt{2}$ C. 14 D. 以上选项都不对
15. 从所有不大于 2018 的正整数中任取 3 个, 均不相邻的选法有 () 种。A. $\binom{2016}{3}$ B. $\frac{1}{2}\binom{2018}{3}$
 C. $\binom{2018}{3} - \binom{2017}{2}$ D. 以上选项都不对
16. 组合数 C_n^k 定义为 $\frac{n!}{k!(n-k)!}$, 求 $C_{2018}^0 + 3C_{2018}^1 + 5C_{2018}^2 + \cdots + 4037C_{2018}^{2018}$ 。A. 2018×2^{2018}
 B. $2018!$ C. 2019×2^{2018} D. 以上选项都不对
17. 数列 $\{a_n\}$ 表示正整数除去完全平方数由小到大的排列, 求 a_{2018} 。A. 2062 B. 2063 C. 1009
 D. 以上选项都不对