2017 年北京大学自主招生测试

1. 已知实数 a, b 满足 $(a^2+4)(b^2+1)=5(2ab-1)$，求 $b\left(a+\dfrac{1}{a}\right)$。A. 1.5　B. 2.5　C. 3.5　D. 以上答案均不正确

2. 在三角形 ABC 中，已知 $\sin A=\dfrac{4}{5}$，$\cos B=\dfrac{4}{13}$，则 $\triangle ABC$ 为（　）A. 锐角三角形　B. 直角三角形　C. 无法确定　D. 以上答案均不正确

3. 已知 $x+\dfrac{2}{x}$ 和 $x^2+\dfrac{2}{x^2}$ 均为整数，则正实数 x 的可能取值有（　）个。A. 1　B. 2　C. 4　D. 以上答案均不正确

4. 复数 z 满足 $z+\dfrac{2}{z}$ 为实数，求 $|z+i|$ 的最小值。

5. 满足 $\sqrt{a^2-4\sqrt{5}}=\sqrt{m}-\sqrt{n}$ 的实数 (a, m, n) 有（　）组。

6. 圆上四点 $ABCD$ 逆时针排列，已知 $AB=1, BC=2, BD=3, \angle DBC=\angle DBA$，求圆的直径。A. $2\sqrt{3}$　B. $2\sqrt{5}$　C. $2\sqrt{7}$　D. 以上答案均不正确

7. 已知 p 为 100 以内的质数，且满足 p^3+7p^2 为完全平方数，求 p 的个数。

8. 函数 $f(x)=x(x+1)(x+2)(x+3)$ 的最小值为（　）A. -1.5　B. -1　C. -2　D. 以上答案均不正确

9. 已知三角形的两条高为 10 和 20，求第三条高的取值范围。

10. 已知三角形的三条中线为 $9, 12, 15$，求三角形的面积。

11. 已知 $S=\dfrac{1}{\log_{1/2}\pi}+\dfrac{1}{\log_{1/3}\pi}+\dfrac{1}{\log_{1/5}\pi}+\dfrac{1}{\log_{1/7}\pi}$，求不大于 S 的最大整数。

12. 求方程 $\log_4(2^x+3^x)=\log_3(4^x-2^x)$ 整数解的个数。

13. 求 $\left(1+\cos\dfrac{\pi}{5}\right)\left(1+\cos\dfrac{3\pi}{5}\right)$。

14. 设 $ABCD$ 是边长为 1 的正方形，正方形所在平面上的点 P 满足 $|PA|^2+|PB|^2=|PC|^2$，求 $|PD|_{\max}$。