

2017 年北京大学博雅计划测试

说明：校订说明：第 11 题按实数参数讨论是否存在最小值；第 14 题明确正整数幂的范围，允许回答不存在。

1. 若正整数 a, b, c 满足 $a + b + c = 402$ ，则使得 $10^n \mid abc$ 的最大正整数 n 是 () A. 5 B. 6
C. 7 D. 以上答案均不正确

2. 满足 $\sin A = \cos B = \tan C$ 的互不相似的 $\triangle ABC$ 一共 () 个。A. 0 B. 1 C. 2 D. 以上答案均不正确

3. 三角形满足一个内角是另一个内角的两倍，且边长为连续正整数，则三边长可能是 () A. 4, 5, 6
B. 6, 7, 8 C. 7, 8, 9 D. 以上答案均不正确

4. $\left(1 + \cos \frac{\pi}{7}\right) \left(1 + \cos \frac{3\pi}{7}\right) \left(1 + \cos \frac{5\pi}{7}\right)$ 的值是 () A. $\frac{9}{8}$ B. $\frac{3}{4}$ C. $\frac{7}{8}$ D. 以上答案均不正确

5. 由 $1, 4, 7, 10, \dots, 2014, 2017$ 构造的数 $1471013 \cdots 20142017$ 除以 9 的余数是 () A. 1 B. 4
C. 7 D. 以上答案均不正确

6. 正整数 x, y, z 使得 $\left(x - \frac{1}{y}\right)\left(y - \frac{1}{z}\right)\left(z - \frac{1}{x}\right)$ 也是正整数, 则 $2x + 3y + 5z$ 的最大值与最小值之差为 ()。A. 9 B. 15 C. 22 D. 以上都不对

7. 若四边形 $ABCD$ 的对角线 AC, BD 相交于 O , $\triangle AOB, \triangle BOC, \triangle COD, \triangle DOA$ 的周长相等, 且 $\triangle AOB, \triangle BOC, \triangle COD$ 的内切圆半径分别为 3, 4, 6, 则 $\triangle DOA$ 的内切圆半径是 ()。A. $\frac{9}{2}$
B. $\frac{3}{2}$ C. $\frac{7}{2}$ D. 以上都不对

8. $9, 95, 995, \dots, \underbrace{99 \cdots 95}_{2016 \text{ 个 } 9}$ 之和中共有 () 个 1。A. 2012 B. 2013 C. 2014 D. 以上都不对

9. 已知 $\frac{\tan^2 \alpha + \tan^2 \beta}{1 + \tan^2 \alpha + \tan^2 \beta} = \sin^2 \alpha + \sin^2 \beta$, 则 $\sin \alpha \sin \beta$ 的最大值是 () A. 0 B. $\frac{\sqrt{2}}{2}$ C. $\frac{1}{2}$
D. 以上都不对

10. 单位圆内接五边形的所有边长与对角线的平方和的最大值是 () A. 15 B. 20 C. 25 D. 以上都不对

11. 若 $a, b, c \in \mathbb{R}$, $a + b + c = 1$, $S = (a + bc)(b + ac) > 100$, 判断 S 的最小值属于哪个区间 (若不存在, 选 D): A. (100, 110) B. (110, 120) C. (120, 130) D. 以上都不对

12. 设 $a = \sin 14^\circ + \cos 14^\circ$, $b = \sin 16^\circ + \cos 16^\circ$, $c = \sqrt{\frac{a^2 + b^2}{2}}$, 则 a, b, c 的大小关系是 ()
A. $b > c > a$ B. $b > a > c$ C. $c > b > a$ D. 以上都不对

13. 现将正整数数列分成两组, 使得两组中均不包含无穷等差数列, 问上述分组方法数 () A. 0
B. 1 C. 无穷种 D. 以上答案均不正确

14. 在 $1 \leq n \leq 2016$ 中, 使得 $(2017 - n)^{2017 - n}$ 和 n^n 个位数字相同的最小正整数 n 是 ()。若不存在, 选 D。A. 3 B. 5 C. 6 D. 以上答案均不正确