

2017 年北京大学 5.14 优特测试

说明：校订教学版：第 14 题明确比赛独立，第 17 题修正互相矛盾的半轴大小条件；第 5 题允许回答无法确定。

1. 已知 $x, y \in \mathbb{R}$ ，且 $4(x-1)^2 + (y-1)^2 = 1$ ，求 $\frac{y}{x}$ 的最大值。
2. 已知 $f(x) = x^2 - \ln x$ ， $g(x) = x - 2$ ，直线 $y = m$ 与 $f(x)$ 和 $g(x)$ 分别交于 P, Q ，求 $|PQ|$ 的最小值。
3. 已知 a, b, c 成等差数列，点 $P(-1, 0)$ 在直线 $l: ax + by + c = 0$ 上的投影为 M ，又已知 N 的坐标为 $(0, 3)$ ，求 $|MN|$ 的最小可能值。
4. 已知正数数列 $\{a_n\}$ 满足 $a_1 = 1$ ，且 $S_n = \frac{1}{2} \left(a_n + \frac{1}{a_n} \right)$ (S_n 为数列的前 n 项和)，求 S_9 。
5. 已知 $f(x)$ 在 $\mathbb{R}$ 上可导，且满足：(1) 当 $x \neq 1$ 时， $(x-1)[f'(x) - f(x)] > 0$ ；(2) $f(2-x) = f(x)e^{2-2x}$ 。试比较 $f(1)$ 与 $f(0)$ 的大小关系，以及 $f(2)$ 与 $f(0)$ 的大小关系。
6. 在 $\triangle ABC$ 中，求 $\cos A + \sqrt{2} \cos B + \sqrt{2} \cos C$ 的最大值。
7. 求值： $9 \tan 10^\circ + 2 \tan 20^\circ + 4 \tan 40^\circ - \tan 80^\circ$ 。
8. 已知 $(a_1 - a_2)^2 + (a_2 - a_3)^2 + (a_3 - a_4)^2 + (a_4 - a_5)^2 = 1$ ，其中 $a_i \in \mathbb{R}$ ， $i = 1, 2, \dots, 5$ ，求 $a_1 - 2a_2 - a_3 + 2a_5$ 的最大值。
9. 已知 54 和 128 是某等比数列中的两项，问该数列中最多有多少项为正整数。
10. 求不定方程 $x^2 - xy - 2x + 3y = 11$ 的正整数解。
11. 求 $\left\lfloor \frac{8}{9} \right\rfloor + \left\lfloor \frac{8^2}{9} \right\rfloor + \dots + \left\lfloor \frac{8^{2018}}{9} \right\rfloor$ 被 63 除的余数，其中 $[x]$ 表示不超过 x 的最大整数。

12. 求 $y = x^2$ 上任三点所确定的外接圆半径的取值范围。
13. 已知 $f(x) = 10^x + \lg(\sqrt{x^2 + 1} + x) - 10^{-x} + 10$, 求解集 $f(3x + 1) + f(x) > 20$ 。
14. 60 支球队两两比赛, 各场比赛结果相互独立, 任两支相互胜率均为 50%, 设至少有两支球队取胜场数相同的概率为 $\frac{p}{q}$, $(p, q) = 1$ 。设 n 是使得 2^n 整除 q 的最大整数, 求 n 。
15. 半径为 2017 的三个球放在一个桌面上, 两两相切。现将另一个球放在这三球的空隙处, 且这个球的顶点 (最高处) 与另三个球的顶点 (最高处) 处于同一平面上, 求这个球的半径。
16. 已知两个同底正三棱锥 $E - ABC$ 、 $F - ABC$ 接于同一个外接球, $E - ABC$ 中侧面与底面的夹角为 15° , 求 $F - ABC$ 侧面与底面夹角的正切值。
17. 【教学补订: 去除矛盾的 $c > d$ 限制】已知 $C_1: \frac{x^2}{a^2} + \frac{y^2}{b^2} = 1$ ($a > b > 0$) 与 $C_2: \frac{x^2}{c^2} - \frac{y^2}{d^2} = 1$ ($c, d > 0$), F_1, F_2 为 C_1 左右焦点, C_2 的渐近线与 C_1 的一个交点是 P , 满足 $PF_1 \perp PF_2$ 。已知 C_1 的离心率为 $\frac{3}{4}$, 求 C_2 的离心率。
18. 已知 $a, b, c \in \{-3, -2, -1, 0, 1, 2, 3\}$, 且 a, b, c 两两不相同。已知直线 $ax + by + c = 0$ 的倾斜角为锐角, 问直线有多少种? (a, b, c) 有多少组?
19. 已知均匀正四面体上写有 1, 2, 3, 4, 游戏中每轮抛掷两个正四面体, 底面数字之和大于 5 则胜且游戏结束, 否则轮到其他玩家。甲乙轮流抛掷, 甲先开始, 问甲胜的概率。
20. 已知 $f(x) = |x^2 + ax + b|$, 若对于任意的 a, b , 均存在 $x_0 \in [1, 4]$, 使得 $f(x_0) \geq m$, 求 m 的取值范围。