

2016 年北京大学博雅计划测试

选择题共 20 小题，在每小题的四个选项中只有一项符合要求；选对得 5 分，多选、少选或错选扣 1 分，不选得 0 分。

1. (教学编拟) 直线 $y = -x + 2$ 与曲线 $y = x^3 + ax$ 相切，则 a 的值为 () A. -3 B. -2 C. -1
D. 前三个答案都不对

2. 已知三角形 ABC 的三边长分别为 a, b, c ，有以下 4 个命题：(1) 以 $\sqrt{a}, \sqrt{b}, \sqrt{c}$ 为边长的三角形一定存在；(2) 以 a^2, b^2, c^2 为边长的三角形一定存在；(3) 以 $\frac{a+b}{2}, \frac{b+c}{2}, \frac{c+a}{2}$ 为边长的三角形一定存在；(4) 以 $|a-b|+1, |b-c|+1, |c-a|+1$ 为边长的三角形一定存在。其中正确命题的个数为 () A. 2 B. 3 C. 4 D. 前三个答案都不对

3. 设 AB, CD 是圆 O 的两条垂直直径，弦 DF 交 AB 于点 E ， $DE = 24$ ， $EF = 18$ ，则 OE 等于 () A. $4\sqrt{6}$ B. $5\sqrt{3}$ C. $6\sqrt{2}$ D. 前三个答案都不对

4. 函数 $f(x) = \begin{cases} \frac{1}{p}, & x = \frac{q}{p}, (p, q) = 1, p, q \in \mathbb{N}^*, \\ 0, & x \notin \mathbb{Q}, \end{cases}$ 则满足 $x \in (0, 1)$ 且 $f(x) > \frac{1}{7}$ 的 x 的个数为 ()
A. 12 B. 13 C. 14 D. 前三个答案都不对

5. 若方程 $x^2 - 3x - 1 = 0$ 的根也是方程 $x^4 + ax^2 + bx + c = 0$ 的根, 则 $a + b - 2c$ 的值为 ()
A. -13 B. -9 C. -5 D. 前三个答案都不对
6. 已知 $k > 0$ 且 $k \neq 1$, 则等比数列 $a + \log_2 k, a + \log_4 k, a + \log_8 k$ 的公比为 () A. $\frac{1}{2}$ B. $\frac{1}{3}$
C. $\frac{1}{4}$ D. 前三个答案都不对
7. $\cos \frac{\pi}{11} \cos \frac{2\pi}{11} \cdots \cos \frac{10\pi}{11}$ 的值为 () A. $-\frac{1}{16}$ B. $-\frac{1}{32}$ C. $-\frac{1}{64}$ D. 前三个答案都不对
8. 设 a, b, c 为实数, $a, c \neq 0$, 方程 $ax^2 + bx + c = 0$ 的两个虚数根 x_1, x_2 满足 $\frac{x_1^2}{x_2}$ 为实数, 则 $\sum_{k=0}^{2015} \left(\frac{x_1}{x_2}\right)^k$ 等于 () A. 1 B. 0 C. $\sqrt{3}i$ D. 前三个答案都不对
9. 将 12 个不同物体分成 3 堆, 每堆 4 个, 则不同的分法种类为 () A. 34650 B. 5940 C. 495
D. 前三个答案都不对
10. 设 A 是以 BC 为直径的圆上的一点, D, E 是线段 BC 上的点, F 是 CB 延长线上的点, 已知 $BF = 4, BD = 2, BE = 5, \angle BAD = \angle ACD, \angle BAF = \angle CAE$, 则 BC 的长为 () A. 11
B. 12 C. 13 D. 前三个答案都不对

11. 两个圆内切于 K ，大圆的弦 AB 与小圆切于 L ，已知 $AK : BK = 2 : 5$ ， $AL = 10$ ，则 BL 的长为 () A. 24 B. 25 C. 26 D. 前三个答案都不对
12. $f(x)$ 是定义在 $\mathbb{R}$ 上的函数，且对任意实数 x 均有 $2f(x) + f(x^2 - 1) = 1$ ，则 $f(-\sqrt{2})$ 等于 ()
A. 0 B. $\frac{1}{2}$ C. $\frac{1}{3}$ D. 前三个答案都不对
13. 从一个正 9 边形的 9 个顶点中选 3 个，使得它们是一个等腰三角形的三个顶点的方法数是 ()
A. 30 B. 36 C. 42 D. 前三个答案都不对
14. 已知正整数 a, b, c, d 满足 $ab = cd$ ，则 $a + b + c + d$ 有可能等于 () A. 101 B. 301 C. 401
D. 前三个答案都不对
15. 三个不同的实数 x, y, z 满足 $x^3 - 3x^2 = y^3 - 3y^2 = z^3 - 3z^2$ ，则 $x + y + z$ 等于 () A. -1
B. 0 C. 1 D. 前三个答案都不对

16. 已知 $a + b + c = 1$, 则 $\sqrt{4a+1} + \sqrt{4b+1} + \sqrt{4c+1}$ 的最大值与最小值的乘积属于区间 ()
A. $[10, 11)$ B. $[11, 12)$ C. $[12, 13)$ D. 前三个答案都不对

17. 在圆内接四边形 $ABCD$ 中, $BD = 6$, $\angle ABD = \angle CBD = 30^\circ$, 则四边形 $ABCD$ 的面积等于 ()
A. $8\sqrt{3}$ B. $9\sqrt{3}$ C. $12\sqrt{3}$ D. 前三个答案都不对

18. $1! + 2! + \cdots + 2016!$ 除以 100 所得余数为 ()
A. 3 B. 13 C. 27 D. 前三个答案都不对

19. 方程组 $\begin{cases} x + y^2 = z^3, \\ x^2 + y^3 = z^4, \\ x^3 + y^4 = z^5 \end{cases}$ 的实数解组数为 ()
A. 5 B. 6 C. 7 D. 前三个答案都不对

20. 方程 $\left(\frac{x^3+x}{3}\right)^3 + \frac{x^3+x}{3} = 3x$ 的所有实根的平方和等于 ()
A. 0 B. 2 C. 4 D. 前三个答案都不对