

2015 年北京大学自主招生测试

一、选择题

1. 整数 x, y, z 满足 $xy + yz + xz = 1$, 则 $(1 + x^2)(1 + y^2)(1 + z^2)$ 可能取到的值为 () A. 16900
B. 17900 C. 18900 D. 前三个答案都不对
2. 在不超过 99 的正整数中选出 50 个不同的正整数, 已知这 50 个数中任两个的和都不等于 99, 也不等于 100。这 50 个数的和可能等于 () A. 3524 B. 3624 C. 3724 D. 前三个答案都不对
3. 已知 $x \in [0, \pi/2]$, 对任意实数 a , 函数 $y = \cos^2 x - 2a \cos x + 1$ 的最小值记为 $g(a)$, 则当 a 取遍所有实数时, $g(a)$ 的最大值为 () A. 1 B. 2 C. 3 D. 前三个答案都不对
4. 已知 $10^{20} - 2^{20}$ 是 2^n 的整数倍, 则正整数 n 的最大值为 () A. 21 B. 22 C. 23 D. 前三个答案都不对
5. 在凸四边形 $ABCD$ 中, $BC = 4$, $\angle ADC = 60^\circ$, $\angle BAD = 90^\circ$, 四边形 $ABCD$ 的面积等于 $\frac{AB \cdot CD + BC \cdot AD}{2}$, 则 CD 的长 (精确到小数点后 1 位) 为 () A. 6.9 B. 7.1 C. 7.3
D. 前三个答案都不对

二、填空题

6. 满足等式 $\left(1 + \frac{1}{x}\right)^{x+1} = \left(1 + \frac{1}{2015}\right)^{2015}$ 的整数 x 的个数是_____。
7. 已知 $a, b, c, d \in [2, 4]$, 则 $\frac{(ab + cd)^2}{(a^2 + d^2)(b^2 + c^2)}$ 的最大值与最小值的和为_____。
8. 对任意实数 $x \in [1, 5]$, $|x^2 + px + q| \leq 2$, 不超过 $\sqrt{p^2 + q^2}$ 的最大整数是_____。

9. 设 a, b, c 为非零实数, $x = \frac{b^2 + c^2 - a^2}{2bc}$, $y = \frac{a^2 + c^2 - b^2}{2ac}$, $z = \frac{b^2 + a^2 - c^2}{2ba}$, 且 $x + y + z = 1$, 则 $x^{2015} + y^{2015} + z^{2015}$ 的值为_____。

10. 设 $A_1, A_2, \dots, A_n$ 都是 9 元集合 $\{1, 2, 3, \dots, 9\}$ 的子集, 已知 $|A_i|$ 为奇数, $1 \leq i \leq n$, $|A_i \cap A_j|$ 为偶数, $1 \leq i \neq j \leq n$, 则 n 的最大值为_____。

三、解答题

11. 已知数列 $\{a_n\}$ 为正项等比数列, 且 $a_3 + a_4 - a_1 - a_2 = 5$, 求 $a_5 + a_6$ 的最小值。

12. 已知 $f(x)$ 为二次函数, 且 $a, f(a), f(f(a)), f(f(f(a)))$ 成正项等比数列, 求证: $f(a) = a$ 。

13. 称四个顶点都在三角形边上的正方形为此三角形的内接正方形。若锐角 $\triangle ABC$ 的三边满足 $a > b > c$, 求证: 这个三角形内接正方形边长的最小值为 $\frac{ac \sin B}{a + c \sin B}$ 。

14. 从 O 出发的两条不同且不反向的射线 l_1, l_2 , 已知直线 l 交 l_1, l_2 于 A, B 两点, 且 $S_{\triangle AOB} = c > 0$ (c 为定值), 记 AB 的中点为 X , 求证: X 的轨迹为一条双曲线在该夹角内的一支。

15. 已知 a_i ($i = 1, 2, 3, \dots, 10$) 满足 $a_1 + a_2 + \dots + a_{10} = 30$, $a_1 a_2 \dots a_{10} < 21$, 求证: 存在 a_i , 使得 $a_i < 1$ 。