2022 年复旦大学强基计划数学试题（教学修订版）

说明：带【修订】标记的题目为教学修订或改编，不视为原始真题措辞。

1.**【修订】**在 $\triangle ABC$ 中，B, C 均为锐角且 $B \neq C$，并满足 $\sin A = 2\sin B \sin C$。

（1） 求 $\tan A \tan B \tan C$ 的取值范围；

（2） 求该式取得最小值时 $\tan B, \tan C$ 的值。

2. 已知 $|\vec{a}| = 4$，$|\vec{b}| = 2$，$\langle \vec{a}, \vec{b} \rangle = \pi/3$，且

$$\vec{c} \cdot \vec{c} - \vec{a} \cdot \vec{c} = 5,$$

求 $|\vec{b} - \vec{c}|$ 的最小值。

3.**【修订】**设

$$f(x) = \begin{cases} |\log_2(x+1)|, & -1 < x \leq 3, \\ \dfrac{1}{2}x^2 - 5x + \dfrac{25}{2}, & x > 3. \end{cases}$$

（1） 求使方程 $f(x) = m$ 恰有四个不同实根的实数 m 的取值范围；

（2） 在（1）的条件下，将四根依次记为 $a < b < c < d$，求 $ab + cd$ 的取值范围。