

2020 年复旦大学数学笔试（教学修订版）

说明：带【修订】标记的题目为教学修订或改编，不视为原始真题措辞。

1. 【修订】已知 $p > 0$ ，抛物线 $y^2 = 2px$ 过焦点 F 的直线交抛物线于 A, B ，且 $\overrightarrow{AF} = 3\overrightarrow{FB}$ 。过 A 作准线的垂线，垂足为 A_1 ，准线交 x 轴于 C 。若三角形 CFA_1 的面积为 $12\sqrt{3}$ ，求 p 。
2. 实数 x, y 满足 $x^2 + 2xy = 1$ ，求 $x^2 + y^2$ 的最小值。
3. 已知 $f(x) = a \sin(2\pi x) + b \cos(2\pi x) + c \sin(4\pi x) + d \cos(4\pi x)$ ，若 $f(\frac{1}{2} + x) + f(x) = f(2x)$ ，则 a, b, c, d 中能确定的参数是哪些？
4. 【修订】设 $a \in \mathbb{R}$ 。若三次方程 $x^3 + ax^2 + 4x + 5 = 0$ 有一个非零纯虚根，求 a 。
5. 求 $(x^2 + \frac{1}{x} + y^3 + \frac{1}{y})^{10}$ 展开式中的常数项。
6. 计算 $\lim_{n \rightarrow +\infty} \left(\frac{1}{1 \cdot 4} + \frac{1}{2 \cdot 5} + \cdots + \frac{1}{n(n+3)} \right)$ 。
7. 点 $(4, 5)$ 绕点 $(1, 1)$ 顺时针旋转 60° ，求所得点坐标。
8. 极坐标方程 $5\rho \cos \theta = 4\rho + 3\rho \cos 2\theta$ ($\rho \geq 0$) 表示何种曲线？
9. 设 $x, y \in [-\frac{\pi}{4}, \frac{\pi}{4}]$ ，且 $x^3 + \cos(x + \frac{3\pi}{2}) - 2a = 0$ ， $4y^3 + \sin y \cos y + a = 0$ ，求 $\cos(x + 2y)$ 。
10. 实数 x, y 满足 $x^2 + y^2 = 1$ 。若 $|x + 2y - a| + |a + 6 - x - 2y|$ 的值与 x, y 无关，求 a 的取值范围。
11. 在 $\triangle ABC$ 中， $\cos \angle BAC = \frac{1}{3}$ 。 O 为内心，且 $\overrightarrow{AO} = x\overrightarrow{AB} + y\overrightarrow{AC}$ ，求 $x + y$ 的最大值。
12. 已知直线 $m: y = x \cos a$ 与 $n: 3x + y = c$ ，判断：A. m, n 可能重合；B. m, n 不可能垂直；C. m 上存在一点 P ，使 n 以 P 为中心旋转后与 m 重合；D. 以上都不对。
13. 抛物线 $3y^2 = x$ 的焦点为 F ， A 在抛物线上， A 点处切线与 AF 夹角为 30° ，求 A 的横坐标。
14. P 为直线 $\begin{vmatrix} x & y-6 \\ -1 & 4 \end{vmatrix} = 0$ 上一点，且 P 到 $A(2, 5)$ 、 $B(4, 3)$ 的距离相同，求 P 的坐标。

15. 从 $\{1, 2, \dots, 9\}$ 中取 x, y 且 $y \neq x$, 连接原点 O 与 $A(x, y), B(y, x)$, 求 $\angle AOB = 2 \arctan \frac{1}{3}$ 的概率。

16. 计算 $\arcsin \frac{\sqrt{14}+3\sqrt{2}}{8} + \arcsin \frac{3}{4}$ 。

17. 三棱锥 $P-ABC$ 的体积为 10.5, 且 $AB = 6, AC = BC = 4, AP = BP = 10$, 求 CP 。

18. 在 $\triangle ABC$ 中, $AB = 9, BC = 6, CA = 7$, 求 BC 边上中线的长。

19. 若 $f(x) = x^2 - 1$, 画出 $f(f(x))$ 的大致图像。
20. 定义 $f_M(x) = 1$ ($x \in M$), $f_M(x) = -1$ ($x \notin M$), 并令 $M \otimes N = \{x \mid f_M(x)f_N(x) = -1\}$ 。
已知 $A = \{x \mid x < \sqrt{2-x}\}$, $B = \{x \mid x(x+3)(x-3) > 0\}$, 求 $A \otimes B$ 。
21. 方程 $3x + 4y + 12z = 2020$ 的非负整数解有多少组?
22. 已知 $m, n \in \mathbb{Z}$ 且 $0 \leq n \leq 11$ 。若 $2^{2020} + 3^{2021} = 12m + n$, 求 n 。
23. 若四边形 $ABCD$ 为凸四边形, 则 $\angle BAC = \angle BDC$ 是 $\angle DAC = \angle DBC$ 的什么条件?
24. 设 $f(x) = 3^x - 3^{-x}$ 的反函数为 f^{-1} , 则 $g(x) = f^{-1}(x-1) + 1$ 在 $[-3, 5]$ 上的最大值与最小值之和为多少?
25. 若 $k > 4$, 直线 $kx - 2y - 2k + 8 = 0$ 、 $2x + k^2y - 4k^2 - 4 = 0$ 与坐标轴围成四边形, 求其面积的取值范围。
26. 【修订】凸四边形 $ABCD$ 的四个顶点按 A, B, C, D 的顺序位于同一个圆上, 且 $AB = 1, CD = 2, AD = 4, BC = 5$ 。直线 AD, BC 交于 P , 求 PA 。
27. 【修订】给定定义在 $\mathbb{R}$ 上的 5 个不同函数, 每个都不恒为零, 其中恰有 3 个奇函数、2 个偶函数。从中等可能地选取 3 个, 求所选函数中既有奇函数又有偶函数的概率。
28. 下列不等式恒成立的是: A. $x^2 + \frac{1}{x^2} \geq x + \frac{1}{x}$; B. $|x-y| + \frac{1}{x-y} \geq 2$; C. $|x-y| - \frac{1}{x-y} \geq 2$; D. $|x-y| \geq |x-z| + |y-z|$ 。
29. 向量数列 $\{a_n\}$ 满足 $a_{n+1} = a_n + d$, 且 $|a_1| = 3$, $a_1 \cdot d = -\frac{3}{2}$ 。令 $S_n = a_1 \cdot (\sum_{i=1}^n a_i)$, 求 S_n 取最大值时的 n 。
30. 安排甲、乙、丙等 7 人完成连续 7 天值班, 每人一天。甲不在第一天, 乙不在第二天, 甲和丙相邻, 求不同安排数。
31. 【修订】平面内两条直线 l_1, l_2 交于 O , 较小夹角为 60° 。点 M 到它们的距离分别为 p, q , 且 $p + q = 2$ 。
- (1) 求 OM 的取值范围;
- (2) 对每个实数 $r \geq 0$, 记同时满足 $p + q = 2$ 与 $OM = r$ 的不同点 M 的个数为 $N(r)$, 求 $N(r)$ 。

32. Given $A = \{1, 2, 3, 4, 5\}$ and $B = \{3, 4, 5, 6, 7\}$, the intersection of A and B is: A. $\{1, 2\}$; B. $\{3, 4, 5\}$; C. $\{1, 2, 3, 4, 5, 6, 7\}$; D. $\{6, 7\}$.

33. Which number is the number 5 the cubic root of? A. 3; B. 5; C. 25; D. 125.