

强基数学第二分册

目录

第二部分 第二分册	1
第十章 立体几何	2
10.1 基础知识	2
10.2 方法与例题	17
10.3 A 组	23
10.4 B 组	27
10.5 C 组	32
10.6 D 组	37
第十一章 直线与圆的方程	40
11.1 基础知识	40
11.2 方法与例题	45
11.3 A 组	49
11.4 B 组	52
11.5 C 组	56
11.6 D 组	61
第十二章 圆锥曲线	64
12.1 基础知识	64
12.2 方法与例题	69
12.3 A 组	73
12.4 B 组	77
12.5 C 组	82
12.6 D 组	86
第十三章 数列	89
13.1 基础知识	89
13.2 方法与例题	93
13.3 A 组	96
13.4 B 组	99
13.5 C 组	104
13.6 D 组	108
第十四章 极限与导数	112
14.1 基础知识	112
14.2 方法与例题	118
14.3 A 组	121

14.4 B 组	125
14.5 C 组	130
14.6 D 组	134
第十五章 排列组合与概率	135
15.1 基础知识	135
15.2 方法与例题	141
15.3 A 组	147
15.4 B 组	151
15.5 C 组	156
15.6 D 组	160

第二部分

第二分册

第十章 立体几何

10.1 基础知识

10.1.1 空间几何的基本语言

定义 10.1: 点、线、面与集合语言 空间几何以点、直线、平面为基本对象。通常用大写字母表示点，用小写字母表示直线，用希腊字母表示平面。

把空间看成点的集合时，直线和平面都可以看成点集，因此常用如下符号描述位置关系：

1. 点在直线上： $A \in l$ ；点不在直线上： $A \notin l$ ；
2. 点在平面内： $A \in \alpha$ ；点不在平面内： $A \notin \alpha$ ；
3. 直线在平面内： $l \subset \alpha$ ；直线不在平面内： $l \not\subset \alpha$ ；
4. 两直线相交于点 A ： $l \cap m = A$ ；
5. 两平面相交于直线 a ： $\alpha \cap \beta = a$ 。

定义 10.2: 公理 1 一条直线 a 上如果有两个不同的点在平面 α 内，则这条直线在这个平面内，记作： $a \subset \alpha$ 。

符号化表述为：若 $A \in a, B \in a, A \in \alpha, B \in \alpha$ ，且 $A \neq B$ ，则 $a \subset \alpha$ 。

定义 10.3: 公理 2 两个平面如果有一个公共点，则有且只有一条通过这个点的公共直线。即若 $P \in \alpha \cap \beta$ ，则存在唯一的直线 m ，使得 $\alpha \cap \beta = m$ ，且 $P \in m$ 。

定义 10.4: 公理 3 与推论

1. 公理 3：过不在同一条直线上的三个点有且只有一个平面，即不共线的三点确定一个平面；
2. 推论 1：直线与直线外一点确定一个平面；
3. 推论 2：两条相交直线确定一个平面；
4. 推论 3：两条平行直线确定一个平面。

若若干点、直线可以放在同一个平面内，则称它们共面；否则称为不共面。

定义 10.5: 公理 4 在空间内，平行于同一直线的两条直线平行。也就是说，若 $a \parallel c, b \parallel c$ ，则 $a \parallel b$ 。

10.1.2 空间中的位置关系

定义 10.6: 空间中两条直线的位置关系 空间中两条不同直线有三种位置关系:

1. 相交直线: 两直线有且只有一个公共点;
2. 平行直线: 两直线共面且没有公共点;
3. 异面直线: 两直线不在任何同一个平面内。

其中, 相交和平行都属于共面关系; 异面直线是不共面关系。

定义 10.7: 异面直线及成角 不同在任何一个平面内的两条直线叫做异面直线。过空间任意一点分别作两条异面直线的平行线, 这两条直线所成的角中, 不超过 90° 的角叫做两条异面直线成角。

与两条异面直线都垂直相交的直线叫做异面直线的公垂线, 公垂线夹在两条异面直线之间的线段长度叫做两条异面直线之间的距离。

定义 10.8: 直线与平面的位置关系 直线与平面的位置关系有三种:

1. 直线在平面内: 直线上所有点都在平面内, 记作 $l \subset \alpha$;
2. 直线与平面相交: 直线和平面有且只有一个公共点, 记作 $l \cap \alpha = A$;
3. 直线与平面平行: 直线和平面没有公共点, 记作 $l \parallel \alpha$ 。

原讲义中把“直线与平面相交”和“直线与平面平行”统称为直线在平面外。

定义 10.9: 平面与平面的位置关系 平面与平面的位置关系有两种:

1. 平行: 两个平面没有公共点, 记作 $\alpha \parallel \beta$;
2. 相交: 两个平面有一条公共直线, 记作 $\alpha \cap \beta = l$ 。

10.1.3 空间中的平行关系

定理 10.1: 直线与平面平行的判定定理 直线 a 是平面 α 外一条直线, 若它与平面内一条直线 b 平行, 则它与平面 α 平行。

符号化表述为: 若 $a \not\subset \alpha$, $b \subset \alpha$, 且 $a \parallel b$, 则 $a \parallel \alpha$ 。

定理 10.2: 直线与平面平行的性质定理 1 若直线 a 与平面 α 平行, 平面 β 经过直线 a 且与平面 α 交于直线 b , 则 $a \parallel b$ 。

符号化表述为: 若 $a \parallel \alpha$, $a \subset \beta$, $\alpha \cap \beta = b$, 则 $a \parallel b$ 。

定理 10.3: 直线与平面平行的性质定理 2 若直线 a 与平面 α 和平面 β 都平行, 且平面 α 与平面 β 相交于 b , 则 $a \parallel b$ 。

这个定理常用于证明某条线与两个平面的交线平行。

定理 10.4: 平面与平面平行的判定定理 平面 α 内有两条相交直线 a 、 b 都与平面 β 平行, 则 $\alpha \parallel \beta$ 。

符号化表述为: 若 $a \subset \alpha$, $b \subset \alpha$, $a \cap b = A$, $a \parallel \beta$, $b \parallel \beta$, 则 $\alpha \parallel \beta$ 。

定理 10.5: 平面与平面平行的性质定理 平面 α 与平面 β 平行, 平面 $\gamma \cap \alpha = a$, $\gamma \cap \beta = b$, 则 $a \parallel b$ 。

即两个平行平面同时被第三个平面所截, 所得交线互相平行。

定理 10.6: 等角定理 如果一个角的两边和另一个角的两边分别平行且方向相同, 则两个角相等。

在空间角度问题中, 等角定理常与“平移异面直线”配合使用, 把异面直线所成角转化为相交直线所成角。

10.1.4 空间中的垂直关系

定义 10.10: 直线与平面垂直 如果直线与平面内的每一条直线都垂直, 则直线与这个平面垂直, 记作 $l \perp \alpha$ 。

若 $l \perp \alpha$, 且 $l \cap \alpha = O$, 则点 O 叫做垂足。

定理 10.7: 直线与平面垂直的判定定理 如果一条直线与平面内的两条相交直线都垂直, 则直线与平面垂直。

符号化表述为: 若 $a \subset \alpha$, $b \subset \alpha$, $a \cap b = A$, $l \perp a$, $l \perp b$, 则 $l \perp \alpha$ 。

定理 10.8: 直线与平面垂直的性质定理 1 两条直线垂直于同一个平面, 则这两条直线平行。

符号化表述为: 若 $a \perp \alpha$, $b \perp \alpha$, 则 $a \parallel b$ 。

定理 10.9: 直线与平面垂直的性质定理 2 若两条平行线中的一条与一个平面垂直, 则另一条也和这个平面垂直。

符号化表述为: 若 $a \parallel b$, $a \perp \alpha$, 则 $b \perp \alpha$ 。

定理 10.10: 三垂线定理及逆定理 设直线 a 为平面 α 的一条斜线, 直线 b 为 a 在平面 α 内的射影, 直线 $c \subset \alpha$ 。则:

1. 三垂线定理: 若 $c \perp b$, 则 $c \perp a$;
2. 三垂线逆定理: 若 $c \perp a$, 则 $c \perp b$ 。

三垂线定理的本质是: 空间中的斜线垂直问题可以转化为平面内射影的垂直问题。

10.1.5 距离、射影与线面角

定义 10.11: 点到平面、直线与平面的距离

1. 平面外一点到平面的垂线段的长度叫做点到平面的距离;
2. 若一条直线与平面平行, 则直线上每一点到平面的距离都相等, 这个距离叫做直线与平面的距离;
3. 若两个平面平行, 则其中一个平面上任意一点到另一个平面的距离叫做两平行平面之间的距离。

因此, 线面距离、面面距离通常都可以转化为点面距离。

定义 10.12: 斜线、射影与斜线段 一条直线与平面相交但不垂直时, 称这条直线为平面的斜线; 斜线和平面的交点叫做斜足。

由斜线上斜足以外的一点向平面引垂线, 垂足叫做这个点在平面上的射影; 连接斜足与垂足所得的线段叫做斜线段在平面内的射影。

定义 10.13: 斜线与平面成角 一条直线与平面相交但不垂直的直线叫做平面的斜线。由斜线上每一点向平面引垂线, 垂足叫这个点在平面上的射影。所有这样的射影在一条直线上, 这条直线叫做斜线在平面内的射影。

斜线与它的射影所成的锐角叫做斜线与平面所成的角。若直线与平面垂直, 则线面角为 90° ; 若直线与平面平行或直线在平面内, 则线面角为 0° 。因此线面角的范围为 $[0^\circ, 90^\circ]$ 。

定理 10.11: 斜线与平面成角的性质 斜线与平面成角是斜线与平面内所有直线成角中最小的角。

也就是说, 若直线 l 与平面 α 所成角为 θ , 直线 $m \subset \alpha$, 则 $\angle(l, m) \geq \theta$ 。

定理 10.12: 三余弦定理 设直线 l 与平面 α 所成角为 θ , 直线 l' 是 l 在平面 α 内的射影, 直线 $m \subset \alpha$ 。若 l' 与 m 所成角为 φ , l 与 m 所成角为 ψ , 则

$$\cos \psi = \cos \theta \cos \varphi.$$

特别地, 当 $m = l'$ 时, $\psi = \theta$, 这说明线面角就是斜线与平面内直线所成角中的最小值。

10.1.6 二面角与面面垂直

定义 10.14: 二面角与直二面角 经过同一条直线 m 的两个半平面 α 、 β (包括直线 m , 称为二面角的棱) 所组成的图形叫二面角, 记作 $\alpha - m - \beta$, 也可记为 $A - m - B$ 、 $\alpha - AB - \beta$ 等。

过棱上任意一点 P 在两个半平面内分别作棱的垂线 AP 、 BP , 则 $\angle APB$ 叫做二面角的平面角。通常二面角的范围是 $[0, \pi]$; 若题目要求锐角二面角, 则取不超过 90° 的角。

特别地, 若二面角的平面角为 90° , 则称为直二面角, 此时两个平面互相垂直, 记作 $\alpha \perp \beta$ 。

定理 10.13: 二面角平面角的常用构造 求二面角时, 常用以下三种方法构造平面角:

1. 定义法: 在棱上一点, 分别在两个面内作垂直于棱的直线;
2. 垂面法: 过棱上一点作垂直于棱的平面, 该平面与两个面的交线所成角即为二面角的平面角;
3. 三垂线法: 利用点到面的垂线、点到棱的垂线与斜线射影构造平面角。

定理 10.14: 平面与平面垂直的判定定理 如果一个平面经过另一个平面的垂线, 则这两个平面垂直。

符号化表述为: 若 $l \subset \alpha$, $l \perp \beta$, 则 $\alpha \perp \beta$ 。

定理 10.15: 平面与平面垂直的性质定理 1 如果两个平面垂直, 过第一个平面内的一点作另一个平面的垂线, 则这条垂线在第一个平面内。

符号化表述为: 若 $\alpha \perp \beta$, $P \in \alpha$, 过 P 作 $l \perp \beta$, 则 $l \subset \alpha$ 。

定理 10.16: 平面与平面垂直的性质定理 2 如果两个平面垂直, 那么在第一个平面内垂直于它们交线的直线垂直于另一个平面。

符号化表述为: 若 $\alpha \perp \beta$, $\alpha \cap \beta = m$, $l \subset \alpha$, $l \perp m$, 则 $l \perp \beta$ 。

10.1.7 空间几何体

定义 10.15: 多面体、凸多面体与截面 由若干个平面多边形围成的几何体叫做多面体。若把多面体的任意一个面延展成平面, 其余各面都在该平面的同一侧, 则称该多面体为凸多面体。

一个几何体和一个平面相交所得的平面图形 (包括其内部) 叫做这个几何体的截面。

定义 10.16: 棱柱的定义与分类 有两个面互相平行而其余的面都是平行四边形, 并且每相邻两个平行四边形的公共边 (称为侧棱) 都互相平行, 由这些面所围成的几何体叫做棱柱。两个互相平行的面叫做底面。

1. 底面是三角形、四边形、五边形的棱柱分别叫三棱柱、四棱柱、五棱柱;
2. 底面是平行四边形的棱柱叫做平行六面体;
3. 侧棱与底面垂直的棱柱叫直棱柱;
4. 底面是正多边形的直棱柱叫做正棱柱;
5. 底面是矩形的直棱柱叫做长方体;
6. 棱长都相等的正四棱柱叫正方体。

棱柱的两个底面全等且对应边互相平行, 侧面都是平行四边形, 侧棱平行且相等。平行六面体、长方体、正方体的四条空间对角线交于一点, 并且被该点平分; 长方体和正方体的四条空间对角线相等。

定义 10.17: 棱锥的定义与分类 有一个面是多边形（这个面称为底面），其余各面是有一个公共顶点的三角形，由这些面围成的多面体叫棱锥。

底面是正多边形，顶点在底面的射影是底面的中心的棱锥叫正棱锥。正棱锥的各个侧面都是全等的等腰三角形，它们底边上的高相等，称为正棱锥的斜高。

定义 10.18: 棱台、圆柱、圆锥与圆台 棱锥被平行于底面的平面所截，截面和底面之间的部分叫做棱台。棱台的上下底面平行，各侧棱延长后交于一点，对应边成比例。

矩形、直角三角形、直角梯形分别绕其一边、一直角边、垂直于底边的腰旋转一周，所得旋转体分别叫做圆柱、圆锥、圆台。它们平行于底面的截面都是圆，过轴的截面分别是矩形、等腰三角形、等腰梯形。

定理 10.17: 凸多面体的欧拉定理 设凸多面体的顶点数为 V ，棱数为 E ，面数为 F ，则

$$V + F - E = 2.$$

10.1.8 球与球面

定义 10.19: 球的定义 空间中到一个定点的距离等于定长的点的轨迹是一个球面。球面所围成的几何体叫做球。定长叫做球的半径，定点叫做球心。

定理 10.18: 球的截面性质 如果球心到平面的距离 d 小于半径 R ，那么平面与球相交所得的截面是圆面，圆心与球心的连线与截面垂直。设截面半径为 r ，则

$$d^2 + r^2 = R^2.$$

过球心的截面圆周叫做球大圆。经过球面两点的球大圆夹在两点间劣弧的长度叫两点间球面距离。

定义 10.20: 经度和纬度

1. 纬线：用平行于赤道平面的平面去截地球所得到的截面圆周；
2. 纬度：纬线上任意一点与球心的连线与赤道平面所成的角；
3. 经线：用经过南极和北极的平面去截地球所得到的截面半圆周（以两极为端点）；
4. 经度：经线所在的平面与本初子午线所在的半平面所成的二面角，根据位置不同又分东经和西经。

定理 10.19: 内切球与外接球的基本事实 对于常见的凸多面体，若存在一个球与各面相切，则称它为内切球；若存在一个球经过所有顶点，则称它为外接球。尤其对于任意四面体，内切球和外接球均存在且唯一。

球相关问题的核心是确定球心位置：外接球球心到各顶点距离相等；内切球球心到各面距离相等。

10.1.9 面积、体积与四面体公式

定理 10.20: 祖氏原理 夹在两个平行平面之间的两个几何体, 被平行于这两个平面的任意平面所截, 如果截得的两个截面的面积总相等, 那么这两个几何体的体积相等。

定理 10.21: 三面角定理 从空间一点出发的不在同一个平面内的三条射线共组成三个角, 其中任意两个角之和大于另一个, 三个角之和小于 360° 。

定理 10.22: 表面积公式

1. 半径为 R 的球的表面积: $S_{\text{球面}} = 4\pi R^2$;
2. 母线长为 l 、底面半径为 r 的圆锥的侧面积: $S_{\text{侧}} = \pi rl$;
3. 底面半径为 r 、高为 h 、母线为 l 的圆柱侧面积为 $2\pi rh$, 圆锥侧面积为 πrl ;
4. 上、下底半径为 r_1, r_2 、母线为 l 的圆台侧面积为 $\pi(r_1 + r_2)l$ 。

定理 10.23: 体积公式

1. 半径为 R 的球的体积: $V_{\text{球}} = \frac{4}{3}\pi R^3$;
2. 底面积为 S 、高为 h 的棱柱 (或圆柱) 的体积: $V = Sh$;
3. 底面积为 S 、高为 h 的棱锥 (或圆锥) 的体积: $V = \frac{1}{3}Sh$;
4. 上、下底面积为 S_1, S_2 、高为 h 的棱台或圆台体积:

$$V = \frac{h}{3} (S_1 + S_2 + \sqrt{S_1 S_2}).$$

定理 10.24: 四面体的相关定理 如下图所示, 设四面体 $ABCD$ 中, $DH \perp$ 平面 ABC 于 H 。记

$$\angle BDC = \alpha, \quad \angle ADC = \beta, \quad \angle ADB = \gamma,$$

$$\angle BAC = A, \quad \angle ABC = B, \quad \angle ACB = C,$$

则:

1. 射影定理: $S_{\triangle AHB} \cdot \cos \phi = S_{\triangle AHD}$ (其中二面角 $D-AB-H$ 为 ϕ);

2. 正弦定理:

$$\frac{\sin \alpha}{\sin A} = \frac{\sin \beta}{\sin B} = \frac{\sin \gamma}{\sin C};$$

3. 余弦定理:

$$\cos \alpha = \cos \beta \cos \gamma + \sin \beta \sin \gamma \cos A,$$

$$\cos A = -\cos B \cos C + \sin B \sin C \cos \alpha;$$

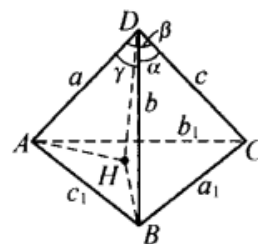
4. 体积公式: 若一组三对棱中取相对棱长为 a, b , 两相对棱距离为 d , 夹角为 ϕ , 则

$$V = \frac{1}{6}abd \sin \phi;$$

又可写为

$$V = \frac{1}{3}S_{\triangle ABD} \cdot h,$$

其中 h 为点 C 到平面 ABD 的距离。



10.1.10 角度与射影工具

定理 10.25: 射影面积公式 一个平面图形所在平面与投影平面的夹角为 θ , 其原面积为 S , 正射影面积为 S' , 则

$$S' = S \cos \theta.$$

因此, 若已知一个图形在另一个平面上的射影面积, 常可直接求两个平面的夹角或二面角。

定理 10.26: 二面角的面积判定法 若三角形 ABC 在平面 α 内的正射影为三角形 $A'B'C'$, 平面 ABC 与平面 α 所成角为 θ , 则

$$\cos \theta = \frac{S_{\triangle A'B'C'}}{S_{\triangle ABC}}.$$

该方法本质上是射影面积公式, 常用于没有明显平面角但容易求面积的二面角问题。

定理 10.27: 三面角余弦定理 设三面角的三个面角为 α, β, γ , 其中 α 与二面角 A 相对, β 与二面角 B 相对, γ 与二面角 C 相对, 则

$$\cos \alpha = \cos \beta \cos \gamma + \sin \beta \sin \gamma \cos A.$$

等价地,

$$\cos A = \frac{\cos \alpha - \cos \beta \cos \gamma}{\sin \beta \sin \gamma}.$$

它可视作球面余弦定理在三面角中的表达, 适合处理已知面角求二面角的问题。

定理 10.28: 三面角正弦定理 沿用三面角余弦定理中的记号, 有

$$\frac{\sin A}{\sin \alpha} = \frac{\sin B}{\sin \beta} = \frac{\sin C}{\sin \gamma}.$$

对称三面角、正棱锥、正四面体中的角度问题常可用此定理简化。

10.1.11 距离与体积工具

定理 10.29: 点面距离的等体积法 若三棱锥 $P-ABC$ 的体积为 V , 点 P 到平面 ABC 的距离为 h , 则

$$V = \frac{1}{3} S_{\triangle ABC} h, \quad h = \frac{3V}{S_{\triangle ABC}}.$$

求点面距离时, 常通过更容易计算的另一个底面表达同一个体积。

定理 10.30: 异面直线距离的向量公式 设两条异面直线的方向向量分别为 $\vec{u}, \vec{v}$, 在两条直线上分别取点 A, B 。若 $\vec{u} \times \vec{v} \neq \vec{0}$, 则两异面直线间的距离为

$$d = \frac{|\overrightarrow{AB} \cdot (\vec{u} \times \vec{v})|}{|\vec{u} \times \vec{v}|}.$$

几何上, 这就是把 $\overrightarrow{AB}$ 在公垂线方向上的投影取长度。

定理 10.31: 三棱锥体积的余弦公式 在三棱锥 $O-ABC$ 中, 设

$$OA = a, \quad OB = b, \quad OC = c,$$

且

$$\angle BOC = \alpha, \quad \angle COA = \beta, \quad \angle AOB = \gamma.$$

则

$$V_{OABC} = \frac{abc}{6} \sqrt{1 + 2 \cos \alpha \cos \beta \cos \gamma - \cos^2 \alpha - \cos^2 \beta - \cos^2 \gamma}.$$

当三条棱两两垂直时, 该式退化为 $V = \frac{1}{6} abc$ 。

10.1.12 外接球模型

定理 10.32: 正棱锥外接球 正棱锥的球心在高线上。若底面外接圆半径为 r_0 , 棱锥高为 h , 外接球半径为 R , 则

$$R^2 = r_0^2 + (h - R)^2,$$

从而

$$R = \frac{h^2 + r_0^2}{2h}.$$

定理 10.33: 正四面体常用公式 棱长为 a 的正四面体中:

$$h = \frac{\sqrt{6}}{3}a, \quad V = \frac{\sqrt{2}}{12}a^3,$$

外接球半径与内切球半径分别为

$$R = \frac{\sqrt{6}}{4}a, \quad r = \frac{\sqrt{6}}{12}a,$$

并且 $R = 3r$ 。

定理 10.34: 四面体内切球半径公式 若四面体体积为 V , 四个面的面积和为 $S_{\text{全}}$, 内切球半径为 r , 则

$$V = \frac{1}{3}rS_{\text{全}}, \quad r = \frac{3V}{S_{\text{全}}}.$$

其证明方法是把四面体分成四个以各面为底、内切球半径为高的小三棱锥。

10.1.13 截面、比例与展开模型

定理 10.35: 平行截面比例定理 棱锥被平行于底面的平面所截，截面与底面相似。若截面到顶点的距离与棱锥高的比为 λ ，则：

$$\text{对应长度比} = \lambda, \quad \text{面积比} = \lambda^2, \quad \text{体积比} = \lambda^3.$$

因此棱台问题常可先补成棱锥，再用比例处理。

定理 10.36: 正方体截面基本性质 一个平面截正方体，截面最多有六条边，因此截面可能为三角形、四边形、五边形或六边形。

1. 若截面为三角形，则该三角形必为锐角三角形；
2. 若截面为四边形，则至少有一组对边平行；
3. 截面可以是正六边形，但不可能是正五边形。

这些性质常通过观察截面边分别落在哪些互相平行的面上来证明。

定理 10.37: 折叠问题的保距原则 平面图形沿某条直线折叠为空间图形时，折叠不改变同一刚性面内的长度和角度；改变的是分属不同半平面的点之间的空间距离和角度。

因此，折叠题通常先保留折叠前的平面度量关系，再用二面角、三垂线、余弦定理或向量方法计算折叠后的空间关系。

10.1.14 空间向量工具

定理 10.38: 空间向量的夹角公式 非零向量 $\vec{a}, \vec{b}$ 的夹角 θ 满足

$$\cos \theta = \frac{\vec{a} \cdot \vec{b}}{|\vec{a}| |\vec{b}|}.$$

若求直线夹角，常取方向向量后再取锐角或直角。

定理 10.39: 线面角的向量公式 设直线方向向量为 $\vec{v}$ ，平面法向量为 $\vec{n}$ ，直线与平面所成角为 θ ，则

$$\sin \theta = \frac{|\vec{v} \cdot \vec{n}|}{|\vec{v}| |\vec{n}|}.$$

这里用 $\sin \theta$ ，是因为直线与平面的夹角和直线与法向量的夹角互余。

定理 10.40: 二面角的向量公式 设两个平面的法向量分别为 $\vec{n}_1, \vec{n}_2$ ，两个平面所成锐角为 θ ，则

$$\cos \theta = \frac{|\vec{n}_1 \cdot \vec{n}_2|}{|\vec{n}_1| |\vec{n}_2|}.$$

若题目要求有向二面角，则不取绝对值，并结合法向量方向判断角的正负。

定理 10.41: 混合积体积公式 若三棱锥 $O-ABC$ 中

$$\overrightarrow{OA} = \vec{a}, \quad \overrightarrow{OB} = \vec{b}, \quad \overrightarrow{OC} = \vec{c},$$

则其体积为

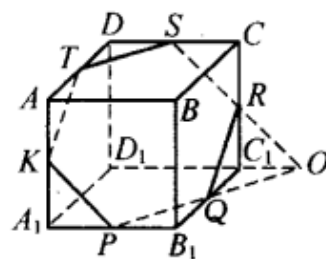
$$V_{OABC} = \frac{1}{6} |\vec{a} \cdot (\vec{b} \times \vec{c})|.$$

该公式是空间向量中统一处理体积、点面距离和异面直线距离的核心公式。

10.2 方法与例题

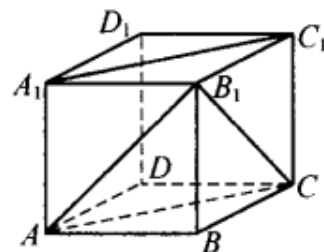
例题 10.1 直线 a 、 b 、 c 都与直线 d 相交，且 $a \parallel b$ ， $c \parallel b$ ，求证： a 、 b 、 c 、 d 共面。

例题 10.2 长方体有一个截面是正六边形是它为正方体的什么条件？

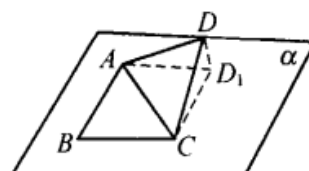


例题 10.3 正方体的 12 条棱互为异面直线的有多少对？

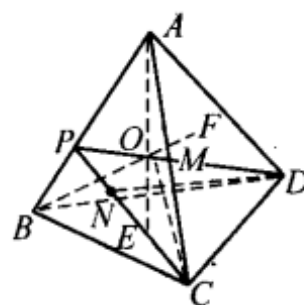
例题 10.4 正方体 $ABCD - A_1B_1C_1D_1$ 棱长为 1, 求面对角线 A_1C_1 与 AB_1 所成的角。



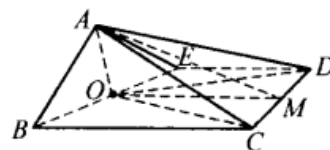
例题 10.5 A, B, C, D 是空间四点, 且四边形 $ABCD$ 四个角都是直角, 求证: 四边形 $ABCD$ 是矩形。



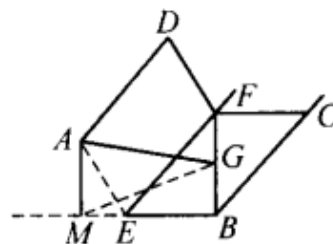
例题 10.6 一个四面体有两个底面上的高线相交, 证明: 它的另两条高线也相交。



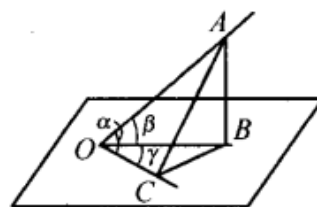
例题 10.7 在矩形 $ABCD$ 中, $AD = 2AB$, E 是 AD 中点, 沿 BE 将 $\triangle ABE$ 折起, 并使 $AC = AD$, 求证: 平面 $ABE \perp$ 平面 $BCDE$ 。



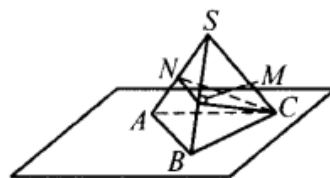
例题 10.8 正方形 $ABCD$ 中, E 、 F 分别是 AB 、 CD 的中点, G 为 BF 的中点, 将正方形沿 EF 折成 120° 的二面角, 求 AG 和平面 $EBCF$ 所成的角。



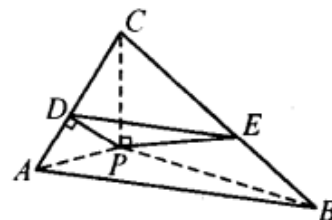
例题 10.9 OA 是平面 α 的一条斜线, $AB \perp \alpha$ 于 B , C 在 α 内, 且 $AC \perp OC$, $\angle AOC = \alpha$, $\angle AOB = \beta$, $\angle BOC = \gamma$, 证明: $\cos \alpha = \cos \beta \cdot \cos \gamma$ 。



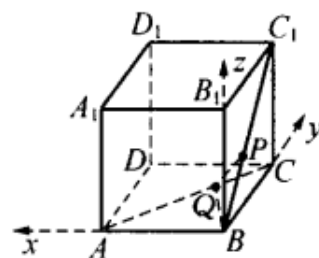
例题 10.10 设 S 为平面 ABC 外一点, $\angle ASB = 45^\circ$, $\angle CSB = 60^\circ$, 二面角 $A-SB-C$ 为直二面角, 求 $\angle ASC$ 的余弦值。



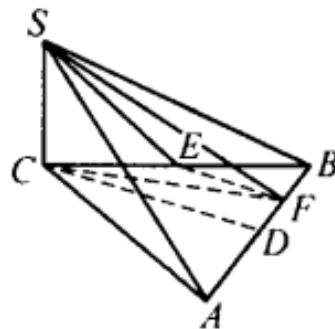
例题 10.11 已知直角 $\triangle ABC$ 的两条直角边 $AC = 2$, $BC = 3$, P 为斜边 AB 上一点, 沿 CP 将此三角形折成直二面角 $A-CP-B$, 当 $AB = \sqrt{7}$ 时, 求二面角 $P-AC-B$ 的大小。



例题 10.12 正方体 $ABCD-A_1B_1C_1D_1$ 的棱长为 a , 求对角线 AC 与 BC_1 的距离。



例题 10.13 在三棱锥 $S-ABC$ 中，底面是边长为 $4\sqrt{2}$ 的正三角形，棱 SC 的长为 2，且垂直于底面， E 、 D 分别是 BC 、 AB 的中点，求 CD 与 SE 间的距离。



例题 10.14 一个凸多面体有 32 个面，每个面或是三角形或是五边形，对于 V 个顶点，每个顶点均有 T 个三角形面和 P 个五边形面相交，求 $100P + 10T + V$ 。

例题 10.15 圆柱直径为 $4R$ ，高为 $22R$ ，问圆柱内最多能装半径为 R 的球多少个？

例题 10.16 已知三棱锥 $S-ABC$ 的底面是正三角形, A 点在侧面 SBC 上的射影 H 是 $\triangle SBC$ 的垂心, 二面角 $H-AB-C$ 的平面角等于 30° , $SA = 2\sqrt{3}$, 求三棱锥 $S-ABC$ 的体积。

例题 10.17 设 d 是任意四面体的相对棱间距离的最小值, h 是四面体的最小高的长, 求证: $2d > h$ 。

10.3 A 组

练习 10.1 正三角形 ABC 的边长为 4, 到 A 、 B 、 C 的距离都是 1 的平面有多少个?

练习 10.2 空间中有四个点 E 、 F 、 G 、 H , 命题甲: E 、 F 、 G 、 H 不共面; 命题乙: 直线 EF 和 GH 不相交, 则甲是乙的什么条件 (充分/必要/充要)?

练习 10.3 动点 P 从棱长为 a 的正方体的一个顶点出发, 沿棱运动, 每条棱至多经过一次, 则点 P 运动的最大距离为多少?

练习 10.4 正方体 $ABCD - A_1B_1C_1D_1$ 中, E 、 F 分别是面 ADD_1A_1 、面 $ABCD$ 的中心, G 为棱 CC_1 中点, 直线 C_1E 、 GF 与 AB 所成的角分别为 α 、 β , 则 $\alpha + \beta = ?$

练习 10.5 若 a, b 为两条异面直线, 过空间一点 O 与 a, b 都平行的平面有多少个?

练习 10.6 CD 是直角 $\triangle ABC$ 斜边 AB 上的高, $BD = 2AD$, 将 $\triangle ACD$ 绕 CD 旋转使二面角 $A - CD - B$ 为 60° , 则异面直线 AC 与 BD 所成的角为多少?

练习 10.7 已知 $PA \perp$ 平面 ABC , AB 是 $\odot O$ 的直径, C 是圆周上一点且 $AC = \frac{1}{2}AB$, 则二面角 $A - PC - B$ 的大小为多少?

练习 10.8 平面 α 上有一个 $\triangle ABC$, $\angle ABC = 105^\circ$, $AC = 2(\sqrt{6} + \sqrt{2})$, 平面 α 两侧各有一点 S, T 使得 $SA = SB = SC = \sqrt{41}$, $TA = TB = TC = 5$, 则 $ST = ?$

练习 10.9 在三棱锥 $S-ABC$ 中, $SA \perp$ 底面 ABC , 二面角 $A-SB-C$ 为直二面角, 若 $\angle BSC = 45^\circ$, $SB = a$, 则经过 A 、 B 、 C 、 S 的球的半径为多少?

练习 10.10 空间某点到棱长为 1 的正四面体顶点距离之和的最小值为多少?

练习 10.11 异面直线 a 、 b 满足 $a \parallel \alpha$, $b \parallel \beta$, $b \parallel \alpha$, $a \parallel \beta$, 求证: $\alpha \parallel \beta$ 。

练习 10.12 四面体 $SABC$ 中, SA 、 SB 、 SC 两两垂直, S_0 、 S_1 、 S_2 、 S_3 分别表示 $\triangle ABC$ 、 $\triangle SBC$ 、 $\triangle SCA$ 、 $\triangle SAB$ 的面积, 求证: $S_0^2 = S_1^2 + S_2^2 + S_3^2$ 。

练习 10.13 正三棱柱 $ABC - A_1B_1C_1$ 中, E 在棱 BB_1 上, 截面 $A_1EC \perp$ 侧面 AA_1C_1C 。(1) 求证: $BE = EB_1$; (2) 若 $AA_1 = A_1B_1$, 求二面角 $E - A_1C - B_1$ 的平面角。

10.4 B 组

练习 10.14 三棱柱 $ABC - A_1B_1C_1$ 中, M 为 A_1B_1 的中点, N 为 B_1C 与 BC_1 的交点, 平面 AMN 交 B_1C_1 于 P , 则 $\frac{B_1P}{PC_1} = ?$

练习 10.15 空间四边形 $ABCD$ 中, $AD = 1$, $BC = \sqrt{3}$ 且 $AD \perp BC$, $BD = \frac{\sqrt{13}}{2}$, $AC = \frac{\sqrt{3}}{2}$, 则 AC 与 BD 所成的角为多少?

练习 10.16 平面 $\alpha \cap$ 平面 $\beta =$ 直线 AB , 点 $C \in \alpha$, 点 $D \in \beta$, $\angle BAC = 45^\circ$, $\angle BAD = 60^\circ$, 且 $CD \perp AB$, 则直线 AB 与平面 ACD 所成的角为多少?

练习 10.17 单位正方体 $ABCD - A_1B_1C_1D_1$ 中, 二面角 $A - BD_1 - B_1$ 大小为多少?

练习 10.18 平行四边形 $ABCD$ 的顶点 A 在二面角 $\alpha - MN - \beta$ 的棱 MN 上, 点 B, C, D 都在 α 上, 且 $AB = 2AD$, $\angle DAN = 45^\circ$, $\angle BAD = 60^\circ$, 若 $ABCD$ 在半平面 β 上射影为菱形, 则二面角 $\alpha - MN - \beta = ?$

练习 10.19 已知异面直线 a, b 成角为 θ , 点 M, A 在 a 上, 点 N, B 在 b 上, MN 为公垂线, 且 $MN = d$, $MA = m$, $NB = n$, 则 AB 的长度为多少?

练习 10.20 已知正三棱锥 $S-ABC$ 侧棱长为 4, $\angle ASB = 45^\circ$, 过点 A 作截面与侧棱 SB 、 SC 分别交于 M 、 N , 则截面 $\triangle AMN$ 周长的最小值为多少?

练习 10.21 l_1 与 l_2 为两条异面直线, l_1 上两点 A 、 B 到 l_2 的距离分别为 a 、 b , 二面角 $A-l_2-B$ 大小为 θ , 则 l_1 与 l_2 之间的距离为多少?

练习 10.22 在半径为 R 的球 O 上一点 P 引三条两两垂直的弦 PA 、 PB 、 PC , 则 $PA^2 + PB^2 + PC^2 = ?$

练习 10.23 过 $\triangle ABC$ 的顶点向平面 α 引垂线 AA_1 、 BB_1 、 CC_1 ，点 A_1 、 B_1 、 $C_1 \in \alpha$ ，则 $\angle BAC$ 与 $\angle B_1A_1C_1$ 的大小关系是？

练习 10.24 三棱锥 $A-BCD$ 中， $\angle ACB = \angle ADB = 90^\circ$ ， $\angle ABC = 60^\circ$ ， $\angle BAD = 45^\circ$ ，二面角 $A-CD-B$ 为直二面角。(1) 求直线 AC 与平面 ABD 所成的角；(2) 若 M 为 BC 中点， E 为 BD 中点，求 AM 与 CE 所成的角；(3) 求二面角 $M-AE-B$ 的大小。

练习 10.25 四棱锥 $P-ABCD$ 底面是边长为 4 的正方形, $PD \perp$ 底面 $ABCD$, $PD = 6$, M 、 N 分别是 PB 、 AB 的中点。(1) 求二面角 $M-DN-C$ 的大小; (2) 求异面直线 CD 与 MN 的距离。

练习 10.26 三棱锥 $S-ABC$ 中, 侧棱 SA 、 SB 、 SC 两两互相垂直, M 为 $\triangle ABC$ 的重心, D 为 AB 中点, 作与 SC 平行的直线 DP , 证明: (1) DP 与 SM 相交; (2) 设 DP 与 SM 的交点为 D' , 则 D' 为三棱锥 $S-ABC$ 外接球球心。

10.5 C 组

练习 10.27 现有边长分别为 3,4,5 的三角形两个, 边长分别为 $4,5,\sqrt{41}$ 的三角形四个, 边长分别为 $\frac{5}{6}\sqrt{2},4,5$ 的三角形六个, 用上述三角形为面, 可以拼成多少个四面体?

练习 10.28 一个六面体的各个面和一个正八面体的各个面都是边长为 a 的正三角形, 这两个多面体的内切球的半径之比是一个既约分数 $\frac{m}{n}$, 那么 $mn = ?$

练习 10.29 已知三个平面 α, β, γ 每两个平面之间的夹角都是 $\theta (0 < \theta \leq \frac{\pi}{2})$, 且 $\alpha \cap \beta = a, \beta \cap \gamma = b, \gamma \cap \alpha = c$, 命题甲: $\theta > \frac{\pi}{3}$; 命题乙: a, b, c 相交于一点, 则甲是乙的什么条件 (充分/必要/充要)?

练习 10.30 棱锥 $M-ABCD$ 的底面是正方形，且 $MA \perp AB$ ，如果 $\triangle AMD$ 的面积为 1，则能放入这个棱锥的最大球的半径为多少？

练习 10.31 将给定的两个全等的正三棱锥的底面粘在一起，恰得到一个所有二面角都相等的六面体，并且该六面体的最短棱长为 2，则最远两个顶点间距离为多少？

练习 10.32 空间三条直线 a 、 b 、 c 两两成异面直线，那么与 a 、 b 、 c 都相交的直线有多少条？

练习 10.33 一个球与正四面体的六条棱都相切，正四面体棱长为 a ，这个球的体积为多少？

练习 10.34 由曲线 $x^2 = 4y$ 、 $x^2 = -4y$ 、 $x = 4$ 、 $x = -4$ 围成的图形绕 y 轴旋转一周所得旋转体的体积为 V_1 ，满足 $x^2 + y^2 \leq 16$ 、 $x^2 + (y - 2)^2 \geq 4$ 、 $x^2 + (y + 2)^2 \geq 4$ 的点 (x, y) 组成的图形绕 y 轴旋转一周所得旋转体的体积为 V_2 ，则 $\frac{V_1}{V_2} = ?$

练习 10.35 顶点为 P 的圆锥的轴截面是等腰直角三角形， A 是底面圆周上的点， B 是底面圆内的点， O 为底面圆圆心， $AB \perp OB$ ，垂足为 B ， $OH \perp PB$ ，垂足为 H ，且 $PA = 4$ ， C 为 PA 的中点，则当三棱锥 $C - HOP$ 体积最大时， $OB = ?$

练习 10.36 $\overrightarrow{OA}$ 、 $\overrightarrow{OB}$ 、 $\overrightarrow{OC}$ 是三个互相垂直的单位向量， π 是过点 O 的一个平面， A' 、 B' 、 C' 分别是 A 、 B 、 C 在 π 上的射影，对任意的平面 π ，由 $OA'^2 + OB'^2 + OC'^2$ 构成的集合为？

练习 10.37 设空间被分为 5 个不交的非空集合，证明：一定有一个平面，它至少与其中的四个集合有公共点。

练习 10.38 在四面体 $ABCD$ 中, $\angle BDC = 90^\circ$, D 到平面 ABC 的垂线的垂足 S 是 $\triangle ABC$ 的垂心, 试证: $(AB + BC + CA)^2 \leq 6(AD^2 + BD^2 + CD^2)$, 并说明等号成立时是一个什么四面体?

练习 10.39 过正四面体 $ABCD$ 的高 AH 作一平面, 与四面体的三个侧面交于三条直线, 这三条直线与四面体的底面夹角为 α 、 β 、 γ , 求 $\tan^2 \alpha + \tan^2 \beta + \tan^2 \gamma$ 之值。

10.6 D 组

练习 10.40 能否在棱长为 1 的正方体形状盒子里放入三个彼此至多有一个公共点的棱长为 1 的正四面体？

练习 10.41 P 、 Q 是正四面体 $A-BCD$ 内任意两点，求证： $\cos \angle PAQ > \frac{1}{2}$ 。

练习 10.42 P, A, B, C, D 是空间五个不同的点, $\angle APB = \angle BPC = \angle CPD = \angle DPA = \theta$ (这里 θ 为已知锐角), 试确定 $\angle APC + \angle BPD$ 的最大值和最小值。

练习 10.43 空间是否存在有限点集 M , 使得对 M 中的任意两点 A, B , 可以在 M 中另取两点 C, D , 使直线 AB 和 CD 互相平行但不重合?

练习 10.44 四面体 $ABCD$ 的四条高 AA_1 、 BB_1 、 CC_1 、 DD_1 相交于 H 点 (A_1 、 B_1 、 C_1 、 D_1 分别为垂足), 三条高上的内点 A_2 、 B_2 、 C_2 满足 $AA_2 : A_2A_1 = BB_2 : B_2B_1 = CC_2 : C_2C_1 = 2 : 1$, 证明: H 、 A_2 、 B_2 、 C_2 、 D_1 在同一个球面上。

练习 10.45 设平面 α 、 β 、 γ 、 δ 与四面体 $ABCD$ 的外接球面分别切于点 A 、 B 、 C 、 D , 证明: 如果平面 α 与 β 的交线与直线 CD 共面, 则 γ 与 δ 的交线与直线 AB 共面。

第十一章 直线与圆的方程

11.1 基础知识

定义 11.1: 曲线与方程的定义 解析几何的研究对象是曲线与方程。解析法的实质是用代数的方法研究几何，即通过映射建立曲线与方程的关系：如果一条曲线上的点构成的集合与一个方程的解集之间存在一一映射，则方程叫做这条曲线的方程，这条曲线叫做方程的曲线。例如 $x^2 + y^2 = 1$ 是以原点为圆心的单位圆的方程。

定义 11.2: 求曲线方程的一般步骤 求曲线方程的一般步骤为：

1. 建立适当的直角坐标系；
2. 写出满足条件的点的集合；
3. 用坐标表示条件，列出方程；
4. 化简方程并确定未知数的取值范围；
5. 证明适合方程的解的对应点都在曲线上，且曲线上对应点都满足方程（实际应用常省略这一步）。

定义 11.3: 直线的倾斜角与斜率 直线向上的方向与 x 轴正方向所成的小于 180° 的正角，叫做它的倾斜角。规定平行于 x 轴的直线的倾斜角为 0° ，倾斜角的正切值（如果存在的话）叫做该直线的斜率。根据直线上一点及斜率可求直线方程。

定义 11.4: 直线方程的常见形式 直线方程的常见形式如下:

1. 一般式: $Ax + By + C = 0$;
2. 点斜式: $y - y_0 = k(x - x_0)$;
3. 斜截式: $y = kx + b$;
4. 截距式: $\frac{x}{a} + \frac{y}{b} = 1$;
5. 两点式: $\frac{x-x_1}{x_2-x_1} = \frac{y-y_1}{y_2-y_1}$;
6. 法线式方程: $x \cos \theta + y \sin \theta = p$ (其中 θ 为法线倾斜角, $|p|$ 为原点到直线的距离);
7. 参数式:

$$\begin{cases} x = x_0 + t \cos \theta \\ y = y_0 + t \sin \theta \end{cases}$$

(其中 θ 为该直线倾斜角), t 的几何意义是定点 $P_0(x_0, y_0)$ 到动点 $P(x, y)$ 的有向线段的数量 (线段的长度前添加正负号, 若 P_0P 方向向上则取正, 否则取负)。

定义 11.5: 直线的到角与夹角 若直线 l_1 、 l_2 的斜率分别为 k_1 、 k_2 , 将 l_1 绕它们的交点逆时针旋转到与 l_2 重合所转过的最小正角叫 l_1 到 l_2 的角; l_1 与 l_2 所成的角中不超过 90° 的正角叫两者的夹角。若记到角为 θ , 夹角为 α , 则

$$\tan \theta = \frac{k_2 - k_1}{1 + k_1 k_2}, \quad \tan \alpha = \left| \frac{k_2 - k_1}{1 + k_1 k_2} \right|$$

定理 11.1: 直线平行与垂直的充要条件 若直线 l_1 与 l_2 的斜率分别为 k_1 、 k_2 且两者不重合, 则 $l_1 \parallel l_2$ 的充要条件是 $k_1 = k_2$; $l_1 \perp l_2$ 的充要条件是 $k_1 k_2 = -1$ 。

定理 11.2: 两点间距离公式 两点 $P_1(x_1, y_1)$ 与 $P_2(x_2, y_2)$ 间的距离公式为:

$$|P_1P_2| = \sqrt{(x_1 - x_2)^2 + (y_1 - y_2)^2}$$

定理 11.3: 点到直线的距离公式 点 $P(x_0, y_0)$ 到直线 $l: Ax + By + C = 0$ 的距离公式为:

$$d = \frac{|Ax_0 + By_0 + C|}{\sqrt{A^2 + B^2}}$$

定义 11.6: 直线系方程 若已知两直线的方程是 $l_1: A_1x + B_1y + C_1 = 0$ 与 $l_2: A_2x + B_2y + C_2 = 0$, 则:

1. 过 l_1 、 l_2 交点的直线方程为 $A_1x + B_1y + C_1 + \lambda(A_2x + B_2y + C_2) = 0$;
2. 由 l_1 与 l_2 组成的二次曲线方程为 $(A_1x + B_1y + C_1)(A_2x + B_2y + C_2) = 0$;
3. 与 l_1 平行的直线方程为 $A_1x + B_1y + C = 0$ ($C \neq C_1$)。

定理 11.4: 二元一次不等式的平面区域表示 若直线 l 方程为 $Ax + By + C = 0$, 若 $B > 0$, 则 $Ax + By + C > 0$ 表示的区域为 l 上方的部分, $Ax + By + C < 0$ 表示的区域为 l 下方的部分。

定义 11.7: 线性规划问题的求解步骤 解决简单的线性规划问题的一般步骤为:

1. 确定各变量, 并以 x 和 y 表示;
2. 写出线性约束条件和线性目标函数;
3. 画出满足约束条件的可行域;
4. 求出最优解。

定义 11.8: 圆的标准方程与参数方程 圆心是点 (a, b) , 半径为 r 的圆的标准方程为 $(x-a)^2 + (y-b)^2 = r^2$, 其参数方程为

$$\begin{cases} x = a + r \cos \theta \\ y = b + r \sin \theta \end{cases}$$

(θ 为参数)。

定理 11.5: 圆的一般方程、切线方程与圆幂 圆的一般方程为 $x^2 + y^2 + Dx + Ey + F = 0$ ($D^2 + E^2 - 4F > 0$), 其圆心为 $(-\frac{D}{2}, -\frac{E}{2})$, 半径为 $\frac{1}{2}\sqrt{D^2 + E^2 - 4F}$ 。

1. 若点 $P(x_0, y_0)$ 为圆上一点, 则过点 P 的切线方程为

$$x_0x + y_0y + D\left(\frac{x_0 + x}{2}\right) + E\left(\frac{y_0 + y}{2}\right) + F = 0;$$

2. 若点 $P(x_0, y_0)$ 在圆外, 则上式表示点 P 关于圆的切点弦的方程;

3. $x_0^2 + y_0^2 + Dx_0 + Ey_0 + F$ 称为点 P 关于圆的幂, 它等于点 P 到圆的切线长的平方。

定理 11.6: 根轴与蒙日定理 到两圆的切线长相等的点的轨迹为一条直线 (或它的一部分), 这条直线叫两圆的根轴。给定如下三个不同的圆: $x^2 + y^2 + D_i x + E_i y + F_i = 0$ ($i = 1, 2, 3$), 则它们两两的根轴方程分别为:

$$(D_1 - D_2)x + (E_1 - E_2)y + (F_1 - F_2) = 0,$$

$$(D_2 - D_3)x + (E_2 - E_3)y + (F_2 - F_3) = 0,$$

$$(D_3 - D_1)x + (E_3 - E_1)y + (F_3 - F_1) = 0.$$

这三条直线交于一点或者互相平行, 此为蒙日定理。

11.2 方法与例题

例题 11.1 在 $\triangle ABC$ 中, $AB = AC$, $\angle A = 90^\circ$, 过 A 引中线 BD 的垂线与 BC 交于点 E, 求证: $\angle ADB = \angle CDE$ 。

例题 11.2 半径等于某个正三角形高的圆在这个三角形的一条边上滚动。证明: 三角形另两条边截圆所得的弧所对的圆心角为 60° 。

例题 11.3 设双曲线 $xy = 1$ 的两支为 C_1 、 C_2 , 正 $\triangle PQR$ 三顶点在此双曲线上, 求证: P, Q, R 不可能在双曲线的同一支上。

例题 11.4 求函数 $f(x) = \sqrt{x^4 - 3x^2 - 6x + 13} - \sqrt{x^4 - x^2 + 1}$ 的最大值。

例题 11.5 已知三条直线 $l_1: mx - y + m = 0$, $l_2: x + my - m(m+1) = 0$, $l_3: (m+1)x - y + m + 1 = 0$ 围成 $\triangle ABC$, 求 m 为何值时, $\triangle ABC$ 的面积有最大值、最小值。

例题 11.6 设 x, y 满足不等式组

$$\begin{cases} 1 \leq x + y \leq 4 \\ y + 2 \geq |2x - 3| \end{cases}$$

(1) 求点 (x, y) 所在的平面区域; (2) 设 $a > -1$, 在 (1) 的区域里, 求函数 $f(x, y) = y - ax$ 的最大值、最小值。

例题 11.7 过原点引直线交圆 $x^2 + (y - 1)^2 = 1$ 于 Q 点，在该直线上取 P 点，使 P 到直线 $y = 2$ 的距离等于 $|PQ|$ ，求 P 点的轨迹方程。

例题 11.8 点 A、B、C 依次在直线 l 上，且 $AB = 4BC$ ，过 C 作 l 的垂线，M 是这条垂线上的动点，以 A 为圆心， AB 为半径作圆， MT_1 与 MT_2 是这个圆的切线，确定 $\triangle MT_1T_2$ 垂心的轨迹。

例题 11.9 已知圆 $x^2 + y^2 = 1$ 和直线 $y = 2x + m$ 相交于 A、B，且 OA 、 OB 与 x 轴正方向所成的角是 α 和 β ，求证： $\sin(\alpha + \beta)$ 是定值。

例题 11.10 已知 $\odot O$ 是单位圆，正方形 $ABCD$ 的一边 AB 是 $\odot O$ 的弦，试确定 $|OD|$ 的最大值、最小值。

例题 11.11 当 m 变化且 $m \neq 0$ 时，求证：圆 $(x - 2m - 1)^2 + (y - m - 1)^2 = 4m^2$ 的圆心在一条定直线上，并求这一系列圆的公切线的方程。

11.3 A 组

练习 11.1 已知两点 $A(-3, 4)$ 和 $B(3, 2)$ ，过点 $P(2, -1)$ 的直线与线段 AB 有公共点，求该直线的倾斜角的取值范围。

练习 11.2 已知 $\theta \in [0, \pi]$ ，求 $y = \frac{3+\cos\theta}{2-\sin\theta}$ 的取值范围。

练习 11.3 三条直线 $2x + 3y - 6 = 0$ ， $x - y = 2$ ， $3x + y + 2 = 0$ 围成一个三角形，当点 $P(x, y)$ 在此三角形边上或内部运动时，求 $2x + y$ 的取值范围。

练习 11.4 若三条直线 $4x + y = 4$ ， $mx + y = 0$ ， $2x - 3my = 4$ 能围成三角形，求 m 的取值范围。

练习 11.5 若 $\lambda \in \mathbb{R}$, 直线 $(2 + \lambda)x - (1 + \lambda)y - 2(3 + 2\lambda) = 0$ 与点 $P(-2, 2)$ 的距离为 d , 比较 d 与 $4\sqrt{2}$ 的大小。

练习 11.6 一圆经过 $A(4, 2)$, $B(-1, 3)$ 两点, 且在两个坐标轴上的四个截距的和为 14, 求此圆的方程。

练习 11.7 自点 $A(-3, 3)$ 发出的光线 l 射到 x 轴上被 x 轴反射, 其反射光线所在的直线与圆 $C : x^2 + y^2 - 4x - 4y + 7 = 0$ 相切, 求光线 l 所在的方程。

练习 11.8 判断 $D^2 = 4F$ 且 $E \neq 0$ 是圆 $x^2 + y^2 + Dx + Ey + F = 0$ 与 x 轴相切的什么条件 (充分/必要/充要)。

练习 11.9 求方程 $|x| - 1 = \sqrt{1 - (y - 1)^2}$ 表示的曲线。

练习 11.10 已知点 M 到点 $A(1, 0)$, $B(a, 2)$ 及到 y 轴的距离都相等, 若这样的点 M 恰好有一个, 求 a 可能值的个数。

练习 11.11 已知函数 $S = x + y$, 变量 x, y 满足条件 $y^2 - 2x \leq 0$ 和 $2x + y \leq 2$, 试求 S 的最大值和最小值。

练习 11.12 A, B 是 x 轴正半轴上两点, $OA = a$, $OB = b$ ($a < b$), M 是 y 轴正半轴上的动点。

1. 求 $\angle AMB$ 的最大值;
2. 当 $\angle AMB$ 取最大值时, 求 OM 长;
3. 当 $\angle AMB$ 取最大值时, 求过 A, B, M 三点的圆的半径。

11.4 B 组

练习 11.13 已知 $\triangle ABC$ 的顶点 $A(3, 4)$ ，重心 $G(1, 1)$ ，顶点 B 在第二象限，垂心在原点 O ，求点 B 的坐标。

练习 11.14 把直线 $\sqrt{3}x - y + 2 + \sqrt{3} = 0$ 绕点 $(-1, 2)$ 旋转 30° ，求得到的直线方程。

练习 11.15 M 是直线 $l: \frac{x}{4} + \frac{y}{3} = 1$ 上一动点，过 M 作 x 轴、 y 轴的垂线，垂足分别为 A 、 B ，求在线段 AB 上满足 $\overrightarrow{AP} = 2\overrightarrow{PB}$ 的点 P 的轨迹方程。

练习 11.16 以相交两圆 $C_1: x^2 + y^2 + 4x + y + 1 = 0$ 及 $C_2: x^2 + y^2 + 2x + 2y + 1 = 0$ 的公共弦为直径的圆的方程。

练习 11.17 已知 $M = \{(x, y) | y = \sqrt{2a^2 - x^2}, a > 0\}$, $N = \{(x, y) | (x - 1)^2 + (y - \sqrt{3})^2 = a^2, a > 0\}$, 若 $M \cap N \neq \emptyset$, 求 a 的最大值与最小值的和。

练习 11.18 圆 $x^2 + y^2 + x - 6y + m = 0$ 与直线 $x + 2y - 3 = 0$ 交于 P 、 Q 两点, O 为原点, $OP \perp OQ$, 求 m 的值。

练习 11.19 已知对于圆 $x^2 + (y - 1)^2 = 1$ 上任意一点 $P(x, y)$, 不等式 $x + y + m \geq 0$ 恒成立, 求 m 的取值范围。

练习 11.20 当 a 为不等于 1 的任何实数时, 圆 $x^2 - 2ax + y^2 + 2(a - 2)y + 2 = 0$ 均与直线 l 相切, 求直线 l 的方程。

练习 11.21 在 $\triangle ABC$ 中, 角 A, B, C 的对边分别为 a, b, c 。若 $\lg \sin A, \lg \sin B, \lg \sin C$ 成等差数列, 判断直线

$$x \sin^2 A + y \sin A = a \quad \text{与} \quad x \sin^2 B + y \sin C = c$$

的位置关系。

练习 11.22 设 $A = \{(x, y) | 0 \leq x \leq 2, 0 \leq y \leq 2\}$, $B = \{(x, y) | x \leq 10, y \geq 2, y \leq x - 4\}$ 是坐标平面 xOy 上的点集, 求 $C = \left\{ \left(\frac{x_1 + x_2}{2}, \frac{y_1 + y_2}{2} \right) | (x_1, y_1) \in A, (x_2, y_2) \in B \right\}$ 所围成图形的面积。

练习 11.23 求圆 $C_1 : x^2 + y^2 + 2x + 6y + 9 = 0$ 与圆 $C_2 : x^2 + y^2 - 6x + 2y + 1 = 0$ 的公切线方程。

练习 11.24 设集合 $L = \{\text{直线 } l \text{ 与直线 } y = 2x \text{ 相交, 且以交点的横坐标为斜率}\}$ 。

1. 点 $(-2, 2)$ 到 L 中的哪条直线的距离最小?
2. 设 $a \in \mathbb{R}^+$, 点 $P(-2, a)$ 到 L 中的直线的距离的最小值设为 $d_{\min}$, 求 $d_{\min}$ 的表达式。

练习 11.25 已知圆 $C : x^2 + y^2 - 6x - 8y = 0$ 和 x 轴交于原点 O 和定点 A , 点 B 是动点, 且 $\angle OBA = 90^\circ$, OB 交 $\odot C$ 于 M , AB 交 $\odot C$ 于 N , 求 MN 的中点 P 的轨迹。

11.5 C 组

练习 11.26 在直角坐标系中纵横坐标都是有理数的点称为有理点。若 a 为无理数，过点 $(a, 0)$ 的所有直线中，求每条直线上至少存在两个有理点的直线的条数。

练习 11.27 等腰 $\triangle ABC$ 的底边 BC 在直线 $x + y = 0$ 上，顶点 $A(2, 3)$ ，如果它的一腰平行于直线 $x - 4y + 2 = 0$ ，求另一腰 AC 所在的直线方程。

练习 11.28 若方程 $2mx^2 + (8 + m^2)xy + 4my^2 + (6 - m)x + (3m - 4)y - 3 = 0$ 表示两条互相垂直的直线，求 m 的值。

| 练习 11.29 求直线 $x + 7y - 5 = 0$ 分圆 $x^2 + y^2 = 1$ 所成的两部分弧长之差的绝对值。

| 练习 11.30 直线 $y = kx - 1$ 与曲线 $y = -\sqrt{1 - (x - 2)^2}$ 有交点，求 k 的取值范围。

| 练习 11.31 求经过点 $A(0, 5)$ 且与直线 $x - 2y = 0$ 、 $2x + y = 0$ 都相切的圆的方程。

练习 11.32 在直角坐标平面上，求同时满足条件： $y \leq 3x$ 、 $y \geq \frac{1}{3}x$ 、 $x + y \leq 100$ 的整点个数。

练习 11.33 求平面上的整点到直线 $y = \frac{5}{3}x + \frac{4}{5}$ 的距离中的最小值。

练习 11.34 已知 $y = \lg(10 - mx^2)$ 的定义域为 $\mathbb{R}$ ，求直线 $y = x \sin(\arctan m) + 10$ 的倾斜角。

练习 11.35 已知 $f(x) = x^2 - 6x + 5$, 求满足 $\begin{cases} f(x) + f(y) \leq 0 \\ f(x) - f(y) \geq 0 \end{cases}$ 的点 (x, y) 构成图形的面积。

练习 11.36 已知在 $\triangle ABC$ 边上作匀速运动的点 D, E, F , 在 $t = 0$ 时分别从 A, B, C 出发, 各以一定速度向 B, C, A 前进, 当时刻 $t = 1$ 时, 分别到达 B, C, A 。

1. 证明: 运动过程中 $\triangle DEF$ 的重心不变;
2. 当 $\triangle DEF$ 面积取得最小值时, 其值是 $\triangle ABC$ 面积的多少倍?

练习 11.37 已知矩形 $ABCD$, 点 $C(4, 4)$, 点 A 在圆 $x^2 + y^2 = 9$ ($x > 0, y > 0$) 上移动, 且 AB 、 AD 两边始终分别平行于 x 轴、 y 轴。求矩形 $ABCD$ 面积的最小值, 以及取得最小值时点 A 的坐标。

练习 11.38 已知直线 $l: y = x + b$ 和圆 $C: x^2 + y^2 + 2y = 0$ 相交于不同两点 A 、 B , 点 P 在直线 l 上, 且满足 $|PA| \cdot |PB| = 2$, 当 b 变化时, 求点 P 的轨迹方程。

11.6 D 组

练习 11.39 设点 $P(x, y)$ 为曲线 $|5x + y| + |5x - y| = 20$ 上任意一点, 求 $x^2 - xy + y^2$ 的最大值、最小值。

练习 11.40 给定矩形 I (长为 b 、宽为 a), 矩形 II (长为 c 、宽为 d), 其中 $a < d < c < b$, 求证: 矩形 I 能够放入矩形 II 的充要条件是:

$$(ac - bd)^2 + (ad - bc)^2 \geq (a^2 - b^2)^2$$

练习 11.41 在直角坐标平面内给定凸五边形 $ABCDE$ ，它的顶点都是整点，求证：其对应边中点构成的凸五边形 A_1, B_1, C_1, D_1, E_1 内部或边界上至少有一个整点。

练习 11.42 在坐标平面上，纵横坐标都是整数的点称为整点，试证：存在一个同心圆的集合，使得：

1. 每个整点都在此集合的某一圆周上；
2. 此集合的每个圆周上，有且只有一个整点。

练习 11.43 在坐标平面上, 是否存在一个含有无穷多条直线 $l_1, l_2, \dots, l_n, \dots$ 的直线族, 它满足条件:

1. 点 $(1, 1) \in l_n, n = 1, 2, 3, \dots$;
2. $k_{n+1} \geq a_n - b_n$, 其中 k_{n+1} 是 l_{n+1} 的斜率, a_n 和 b_n 分别是 l_n 在 x 轴和 y 轴上的截距, $n = 1, 2, 3, \dots$;
3. $k_n k_{n+1} \geq 0, n = 1, 2, 3, \dots$ 。

并证明你的结论。

练习 11.44 在坐标平面内, 一圆交 x 轴正半轴于 R, S , 过原点的直线 l_1, l_2 都与此圆相交, l_1 交圆于 A, B , l_2 交圆于 D, C , 直线 AC, BD 分别交 x 轴正半轴于 P, Q , 求证:

$$\frac{1}{|OR|} + \frac{1}{|OS|} = \frac{1}{|OP|} + \frac{1}{|OQ|}$$

第十二章 圆锥曲线

12.1 基础知识

定义 12.1: 椭圆的第一、第二、第三定义 椭圆有如下三个定义:

1. 第一定义: 平面上到两个定点的距离之和等于定长 (大于两个定点之间的距离) 的点的轨迹, 即 $|PF_1| + |PF_2| = 2a$ ($2a > |F_1F_2| = 2c$);
2. 第二定义: 平面上满足如下条件的点的轨迹, 其中定点不在定直线上:

$$\frac{|PF|}{d} = e \quad (0 < e < 1);$$

3. 第三定义: 在直角坐标平面内给定两圆 $c_1: x^2 + y^2 = a^2$ 、 $c_2: x^2 + y^2 = b^2$ ($a, b \in \mathbb{R}^+$ 且 $a \neq b$), 从原点出发的射线交圆 c_1 于 P , 交圆 c_2 于 Q , 过 P 引 y 轴的平行线, 过 Q 引 x 轴的平行线, 两条线的交点的轨迹即为椭圆。

定义 12.2: 椭圆的标准方程与参数方程 以椭圆的中心为原点, 焦点所在的直线为坐标轴建立坐标系, 椭圆的标准方程分两种形式:

1. 焦点在 x 轴上: $\frac{x^2}{a^2} + \frac{y^2}{b^2} = 1$ ($a > b > 0$), 参数方程为

$$\begin{cases} x = a \cos \theta \\ y = b \sin \theta \end{cases}$$

(θ 为参数);

2. 焦点在 y 轴上: $\frac{y^2}{a^2} + \frac{x^2}{b^2} = 1$ ($a > b > 0$)。

定义 12.3: 椭圆的相关概念 对于中心在原点、焦点在 x 轴上的椭圆 $\frac{x^2}{a^2} + \frac{y^2}{b^2} = 1$ ($a > b > 0$):

1. a 为半长轴长, b 为半短轴长, c 为半焦距, 满足 $c^2 = a^2 - b^2$;
2. 长轴端点、短轴端点、两个焦点的坐标分别为 $(\pm a, 0)$ 、 $(0, \pm b)$ 、 $(\pm c, 0)$;
3. 左、右焦点对应的准线方程分别为 $x = -\frac{a^2}{c}$ 、 $x = \frac{a^2}{c}$;
4. 离心率 $e = \frac{c}{a}$, 由 $c^2 = a^2 - b^2$ 知 $0 < e < 1$;
5. 椭圆有两条对称轴, 分别为长轴、短轴。

定理 12.1: 椭圆的焦半径公式 对于椭圆 $\frac{x^2}{a^2} + \frac{y^2}{b^2} = 1$ ($a > b > 0$), $F_1(-c, 0)$ 、 $F_2(c, 0)$ 为其两焦点, 若 $P(x, y)$ 是椭圆上的任意一点, 则

$$|PF_1| = a + ex, \quad |PF_2| = a - ex.$$

定理 12.2: 椭圆的常用结论 对于椭圆 $\frac{x^2}{a^2} + \frac{y^2}{b^2} = 1$ ($a > b > 0$), 有如下常用结论:

1. 过椭圆上一点 $P(x_0, y_0)$ 的切线方程为 $\frac{x_0 x}{a^2} + \frac{y_0 y}{b^2} = 1$;
2. 斜率为 k 的切线方程为 $y = kx \pm \sqrt{a^2 k^2 + b^2}$;
3. 过焦点 $F_2(c, 0)$ 倾斜角为 θ 的弦长为 $l = \frac{2ab^2}{a^2 - c^2 \cos^2 \theta}$ 。

定义 12.4: 双曲线的第一、第二定义 双曲线有如下两个定义:

1. 第一定义: 满足 $||PF_1| - |PF_2|| = 2a$ ($2a < 2c = |F_1 F_2|, a > 0$) 的点 P 的轨迹;
2. 第二定义: 到定点的距离与到定直线距离之比为常数 e ($e > 1$) 的点的轨迹。

定义 12.5: 双曲线的标准方程与参数方程 中心在原点的双曲线标准方程分两种形式:

1. 焦点在 x 轴上: $\frac{x^2}{a^2} - \frac{y^2}{b^2} = 1$ ($a, b > 0$), 参数方程为

$$\begin{cases} x = a \sec \varphi \\ y = b \tan \varphi \end{cases}$$

(φ 为参数);

2. 焦点在 y 轴上: $\frac{y^2}{a^2} - \frac{x^2}{b^2} = 1$ ($a, b > 0$).

定义 12.6: 双曲线的相关概念 对于中心在原点、焦点在 x 轴上的双曲线 $\frac{x^2}{a^2} - \frac{y^2}{b^2} = 1$ ($a, b > 0$):

1. a 为半实轴长, b 为半虚轴长, c 为半焦距, 满足 $c^2 = a^2 + b^2$;
2. 实轴端点、左/右焦点的坐标分别为 $(\pm a, 0)$ 、 $F_1(-c, 0)$ 、 $F_2(c, 0)$;
3. 左、右焦点对应的准线方程分别为 $x = -\frac{a^2}{c}$ 、 $x = \frac{a^2}{c}$;
4. 离心率 $e = \frac{c}{a}$, 由 $c^2 = a^2 + b^2$ 知 $e > 1$;
5. 两条渐近线方程为 $y = \pm \frac{b}{a}x$;
6. 双曲线 $\frac{x^2}{a^2} - \frac{y^2}{b^2} = 1$ 与 $\frac{x^2}{a^2} - \frac{y^2}{b^2} = -1$ 有相同的渐近线, 四个焦点共圆;
7. 若 $a = b$, 则为等轴双曲线。

定理 12.3: 双曲线的常用结论 对于双曲线 $\frac{x^2}{a^2} - \frac{y^2}{b^2} = 1$ ($a, b > 0$), $F_1(-c, 0)$ 、 $F_2(c, 0)$ 为其两焦点, 有如下常用结论:

1. 焦半径公式: 若 $P(x, y)$ 在右支上, 则 $|PF_1| = ex + a$, $|PF_2| = ex - a$; 若 $P(x, y)$ 在左支上, 则 $|PF_1| = -ex - a$, $|PF_2| = -ex + a$;
2. 过焦点的倾斜角为 θ 的弦长为 $\frac{2ab^2}{a^2 - c^2 \cos^2 \theta}$ 。

定义 12.7: 抛物线的定义与标准方程

1. 定义: 平面内与一个定点 F 和一条定直线 l 的距离相等的点的轨迹叫做抛物线, 点 F 叫焦点, 直线 l 叫做抛物线的准线;
2. 标准方程: 取经过焦点 F 且垂直于准线 l 的直线为 x 轴, x 轴与 l 交于 K , 以 KF 的垂直平分线为 y 轴, 设 $|KF| = p$, 则焦点 $F(\frac{p}{2}, 0)$, 准线方程 $x = -\frac{p}{2}$, 标准方程为 $y^2 = 2px$ ($p > 0$), 离心率 $e = 1$ 。

定理 12.4: 抛物线的常用结论 若 $P(x_0, y_0)$ 为抛物线 $y^2 = 2px$ ($p > 0$) 上任一点, 则:

1. 焦半径 $|PF| = x_0 + \frac{p}{2}$;
2. 过点 P 的切线方程为 $y_0 y = p(x + x_0)$;
3. 过焦点倾斜角为 θ 的弦长为 $\frac{2p}{1 - \cos^2 \theta}$ 。

定义 12.8: 极坐标系的定义 在平面内取一个定点为极点记为 O , 从 O 出发的射线为极轴记为 Ox 轴, 建立极坐标系; 对于平面内任意一点 P , 记 $|OP| = \rho$, $\angle xOP = \theta$, 则 (ρ, θ) 唯一确定点 P 的位置, (ρ, θ) 称为点 P 的极坐标。

定理 12.5: 圆锥曲线的统一定义与极坐标方程 到定点的距离与到定直线的距离的比为常数 e 的点 P : 若 $0 < e < 1$, 轨迹为椭圆; 若 $e > 1$, 轨迹为双曲线的一支; 若 $e = 1$, 轨迹为抛物线。

三种圆锥曲线统一的极坐标方程为:

$$\rho = \frac{ep}{1 - e \cos \theta}.$$

12.2 方法与例题

例题 12.1 已知定点 $A(2, 1)$, F 是椭圆 $\frac{x^2}{25} + \frac{y^2}{16} = 1$ 的左焦点, 点 P 为椭圆上的动点, 当 $3|PA| + 5|PF|$ 取最小值时, 求点 P 的坐标。

例题 12.2 已知 P, P' 为双曲线 $C: \frac{x^2}{a^2} - \frac{y^2}{b^2} = 1$ 右支上两点, PP' 延长线交右准线于 K , PF_1 延长线交双曲线于 Q (F_1 为右焦点), 求证: $\angle P'F_1K = \angle KF_1Q$ 。

例题 12.3 已知一椭圆及焦点 F , 点 A 为椭圆上一动点, 求线段 FA 中点 P 的轨迹方程。

例题 12.4 长为 a 、 b 的线段 AB 、 CD 分别在 x 轴、 y 轴上滑动，且 A 、 B 、 C 、 D 四点共圆，求此动圆圆心 P 的轨迹。

例题 12.5 在坐标平面内， $\angle AOB = \frac{\pi}{3}$ ， AB 边在直线 $l: x = 3$ 上移动，求三角形 AOB 的外心的轨迹方程。

例题 12.6 过双曲线 $\frac{x^2}{a^2} - \frac{y^2}{b^2} = 1$ ($a > 0, b > 0$) 的右焦点 F 作 $B_1B_2 \perp x$ 轴，交双曲线于 B_1 、 B_2 两点， B_2 与左焦点 F_1 连线交双曲线于 B 点，连结 B_1B 交 x 轴于 H 点，求证： H 的横坐标为定值。

例题 12.7 设抛物线 $y^2 = 2px$ ($p > 0$) 的焦点为 F , 经过点 F 的直线交抛物线于 A 、 B 两点, 点 C 在准线上, 且 $BC \parallel x$ 轴, 证明: 直线 AC 经过定点。

例题 12.8 在椭圆 $\frac{x^2}{a^2} + \frac{y^2}{b^2} = 1$ 上有两点 A 、 B 满足 $OA \perp OB$ (O 为原点), 求证: $\frac{1}{|OA|^2} + \frac{1}{|OB|^2}$ 为定值。

例题 12.9 设 A 、 B 是椭圆 $x^2 + 3y^2 = 1$ 上的两个动点, 且 $OA \perp OB$ (O 为原点), 求 $|AB|$ 的最大值与最小值。

例题 12.10 设一椭圆中心为原点，长轴在 x 轴上，离心率为 $\frac{\sqrt{3}}{2}$ ，若圆 $C: x^2 + (y - \frac{3}{2})^2 = 1$ 上点与这椭圆上点的最大距离为 $1 + \sqrt{7}$ ，试求这个椭圆的方程。

例题 12.11 若抛物线 $y = ax^2 - 1$ 上存在关于直线 $x + y = 0$ 成轴对称的两点，试求 a 的取值范围。

例题 12.12 若直线 $y = 2x + b$ 与椭圆 $\frac{x^2}{4} + y^2 = 1$ 相交，(1) 求 b 的范围；(2) 当截得弦长最大时，求 b 的值。

12.3 A 组

练习 12.1 A 为半径是 R 的定圆 $\odot O$ 上一定点, B 为 $\odot O$ 上任一点, 点 P 是 A 关于 B 的对称点, 则点 P 的轨迹是?

练习 12.2 一动点到两相交直线的距离的平方和为定值 $m^2 (> 0)$, 则动点的轨迹是?

练习 12.3 椭圆 $\frac{x^2}{100} + \frac{y^2}{36} = 1$ 上有一点 P , 它到左准线的距离是 10, 求它到右焦点的距离。

练习 12.4 双曲线方程 $\frac{x^2}{|k|-2} + \frac{y^2}{5-k} = 1$, 求 k 的取值范围。

练习 12.5 椭圆 $\frac{x^2}{100} + \frac{y^2}{64} = 1$ 焦点为 F_1 、 F_2 ，椭圆上的点 P 满足 $\angle F_1PF_2 = 60^\circ$ ，则 $\triangle F_1PF_2$ 的面积是？

练习 12.6 直线 l 被双曲线 $\frac{x^2}{4} - y^2 = 1$ 所截的线段 MN 恰被点 $A(3, -1)$ 平分，求 l 的方程。

练习 12.7 $\triangle ABC$ 的三个顶点都在抛物线 $y^2 = 32x$ 上，点 $A(2, 8)$ ，且 $\triangle ABC$ 的重心与这条抛物线的焦点重合，求直线 BC 的斜率。

练习 12.8 已知双曲线的两条渐近线方程为 $3x - 4y - 2 = 0$ 和 $3x + 4y - 10 = 0$ ，一条准线方程为 $5y + 4 = 0$ ，则双曲线方程为？

练习 12.9 已知曲线 $y^2 = ax$ ，与其关于点 $(1, 1)$ 对称的曲线有两个不同的交点，如果过这两个交点的直线的倾斜角为 45° ，那么 $a = ?$

练习 12.10 P 为等轴双曲线 $x^2 - y^2 = a^2$ 上一点，求 $\frac{|PF_1| + |PF_2|}{|PO|}$ 的取值范围。

练习 12.11 已知椭圆 $\frac{x^2}{a_1^2} + \frac{y^2}{b_1^2} = 1$ 与双曲线 $\frac{x^2}{a_2^2} - \frac{y^2}{b_2^2} = 1$ 有公共的焦点 F_1, F_2 ，设 P 是它们的一个交点，求 $\angle F_1PF_2$ 和 $\triangle PF_1F_2$ 的面积。

练习 12.12 已知: (i) 半圆的直径 AB 长为 $2r$; (ii) 半圆外的直线 l 与 BA 的延长线垂直, 垂足为 T , 设 $|AT| = 2a(2a < \frac{r}{2})$; (iii) 半圆上有相异两点 M 、 N , 它们与直线 l 的距离 $|MP|$ 、 $|NQ|$ 满足 $\frac{|MP|}{|AM|} = \frac{|NQ|}{|AN|} = 1$, 求证: $|AM| + |AN| = |AB|$ 。

练习 12.13 给定双曲线 $x^2 - \frac{y^2}{2} = 1$, 过点 $A(2, 1)$ 的直线 l 与所给的双曲线交于点 P_1 和 P_2 , 求线段 P_1P_2 的中点的轨迹方程。

12.4 B 组

练习 12.14 双曲线与椭圆 $x^2 + 4y^2 = 64$ 共焦点，它的一条渐近线方程是 $x + \sqrt{3}y = 0$ ，则此双曲线的标准方程是？

练习 12.15 过抛物线焦点 F 的直线与抛物线相交于 A 、 B 两点，若 A 、 B 在抛物线准线上的射影分别是 A_1 、 B_1 ，则 $\angle A_1FB_1 = ?$

练习 12.16 双曲线 $\frac{x^2}{a^2} - \frac{y^2}{b^2} = 1$ 的一个焦点为 F_1 ，顶点为 A_1 、 A_2 ， P 是双曲线上任一点，以 $|PF_1|$ 为直径的圆与以 $|A_1A_2|$ 为直径的圆的位置关系为？

练习 12.17 椭圆的中心在原点，离心率 $e = \frac{1}{3}$ ，一条准线方程为 $x = 11$ ，椭圆上有一点 M 横坐标为 -1 ，求 M 到此准线异侧的焦点 F_1 的距离。

练习 12.18 求 $4a^2 + b^2 = 1$ 是直线 $y = 2x + 1$ 与椭圆 $\frac{x^2}{a^2} + \frac{y^2}{b^2} = 1$ 仅有一个公共点的什么条件（充分/必要/充要）。

练习 12.19 参数方程
$$\begin{cases} x = m + 2t^2 \\ y = 2m + 2\sqrt{2}t \end{cases} \quad (t \text{ 为参数})$$
 表示的抛物线焦点总在一条定直线上，求这条直线的方程。

练习 12.20 如果直线 $y = kx + 1$ 与焦点在 x 轴上的椭圆 $\frac{x^2}{5} + \frac{y^2}{m} = 1$ 总有公共点, 则 m 的范围是?

练习 12.21 过双曲线 $\frac{x^2}{9} - \frac{y^2}{6} = 1$ 的左焦点, 且被双曲线截得线段长为 6 的直线有几条?

练习 12.22 过坐标原点的直线 l 与椭圆 $\frac{(x-3)^2}{6} + \frac{y^2}{2} = 1$ 相交于 A 、 B 两点, 若以 AB 为直径的圆恰好通过椭圆的右焦点 F , 则直线 l 的倾斜角为?

练习 12.23 以椭圆 $x^2 + a^2y^2 = a^2$ ($a > 1$) 的一个顶点 $C(0, 1)$ 为直角顶点作此椭圆的内接等腰直角三角形 ABC ，这样的三角形最多可作几个？

练习 12.24 求椭圆 $\frac{x^2}{a^2} + \frac{y^2}{b^2} = 1$ 上任一点的两条焦半径夹角 θ 的正弦的最大值。

练习 12.25 设 F 、 O 分别为椭圆 $\frac{x^2}{a^2} + \frac{y^2}{b^2} = 1$ 的左焦点和中心，对于过点 F 的椭圆的任意弦 AB ，点 O 都在以 AB 为直径的圆内，求椭圆离心率 e 的取值范围。

练习 12.26 已知双曲线 $C_1: \frac{x^2}{a^2} - \frac{y^2}{2a^2} = 1$ ($a > 0$)，抛物线 C_2 的顶点在原点 O ， C_2 的焦点是 C_1 的左焦点 F_1 。(1) 求证： C_1 、 C_2 总有两个不同的交点；(2) 问：是否存在过 C_2 的焦点 F_1 的弦 AB ，使 $\triangle AOB$ 的面积有最大值或最小值？若存在，求直线 AB 的方程与 $S_{\triangle AOB}$ 的最值，若不存在，说明理由。

12.5 C 组

练习 12.27 在平面直角坐标系中, 若方程 $m(x^2 + y^2 + 2y + 1) = (x - 2y + 3)^2$ 表示的曲线为椭圆, 则 m 的取值范围是?

练习 12.28 设 O 为抛物线的顶点, F 为焦点, 且 PQ 为过 F 的弦, 已知 $|OF| = a$, $|PQ| = b$, 求 $\triangle OPQ$ 面积。

练习 12.29 给定椭圆 $\frac{x^2}{a^2} + \frac{y^2}{b^2} = 1$, 如果存在过左焦点 F 的直线交椭圆于 P 、 Q 两点, 且 $OP \perp OQ$, 则离心率 e 的取值范围是?

练习 12.30 F_1, F_2 为双曲线 $\frac{x^2}{a^2} - \frac{y^2}{b^2} = 1$ ($a > b > 0$) 的左、右焦点, P 为双曲线上的动点, 过 F_1 作 $\angle F_1PF_2$ 平分线的垂线, 垂足为 M , 则 M 的轨迹为?

练习 12.31 $\triangle ABC$ 一边的两顶点坐标为 $B(0, \sqrt{2})$ 和 $C(0, -\sqrt{2})$, 另两边斜率的乘积为 $-\frac{1}{2}$, 若点 T 坐标为 $(t, 0)$ ($t \in \mathbb{R}^+$), 则 AT 的最小值为?

练习 12.32 长为 l ($l < 1$) 的线段 AB 的两端点在抛物线 $y = x^2$ 上滑动, 则线段 AB 的中点 M 到 x 轴的最短距离等于?

练习 12.33 已知抛物线 $y^2 = 2px$ 及定点 $A(a, b)$ 、 $B(-a, 0)$ ($ab \neq 0$, $b^2 \neq 2pa$), M 是抛物线上的点, 设直线 AM 、 BM 与抛物线的另一个交点分别为 M_1 、 M_2 , 当 M 变动时, 直线 M_1M_2 恒过一个定点, 求此定点坐标。

练习 12.34 已知点 $P(1, 2)$ 既在椭圆 $\frac{x^2}{a^2} + \frac{y^2}{b^2} = 1$ 内部 (含边界), 又在圆 $x^2 + y^2 = \frac{a^2 + 2b^2}{3}$ 外部 (含边界), 若 $a, b \in \mathbb{R}^+$, 则 $a + b$ 的最小值为?

练习 12.35 已知椭圆 $\frac{x^2}{4} + \frac{y^2}{3} = 1$ 的内接 $\triangle ABC$ 的边 AB 、 AC 分别过左、右焦点 F_1 、 F_2 , 椭圆的左、右顶点分别为 D 、 E , 直线 DB 与直线 CE 交于点 P , 当点 A 在椭圆上变动时, 试求点 P 的轨迹。

练习 12.36 设曲线 $C_1: \frac{x^2}{a^2} + y^2 = 1$ (a 为正常数) 与 $C_2: y^2 = 2(x+m)$ 在 x 轴上方有一个公共点 P 。
(1) 求实数 m 的取值范围 (用 a 表示); (2) O 为原点, 若 C_1 与 x 轴的负半轴交于点 A , 当 $0 < a < \frac{1}{2}$ 时, 试求 $\triangle OAP$ 面积的最大值 (用 a 表示)。

练习 12.37 已知直线 l 过原点, 抛物线 C 的顶点在原点, 焦点在 x 轴正半轴上, 若点 $A(-1, 0)$ 和 $B(0, 8)$ 关于 l 的对称点都在 C 上, 求直线 l 和抛物线的方程。

12.6 D 组

练习 12.38 在四边形 $ABCD$ 中, 对角线 AC 平分 $\angle BAD$, 在 CD 上取一点 E , BE 与 AC 相交于 F , 延长 DF 交 BC 于 G , 求证: $\angle GAC = \angle EAC$ 。

练习 12.39 求证: 在坐标平面上不存在一条具有奇数个顶点, 每段长都为 1 的闭折线, 它的每个顶点坐标都是有理数。

练习 12.40 以 B_0 和 B_1 为焦点的椭圆与 $\triangle AB_0B_1$ 的边 AB_i 交于 $C_i (i = 0, 1)$, 在 AB_0 的延长线上任取点 P_0 , 以 B_0 为圆心, B_0P_0 为半径作圆弧 $\widehat{P_0Q_0}$ 交 C_1B_0 的延长线于 Q_0 ; 以 C_1 为圆心, C_1Q_0 为半径作圆弧 $\widehat{Q_0P_1}$ 交 B_1A 的延长线于 P_1 ; 以 B_1 为圆心, B_1P_1 为半径作圆弧 $\widehat{P_1Q_1}$ 交 B_1C_0 的延长线于 Q_1 ; 以 C_0 为圆心, C_0Q_1 为半径作圆弧 $\widehat{Q_1P'_0}$, 交 AB_0 的延长线于 P'_0 . 求证: (1) 点 P'_0 与点 P_0 重合, 且圆弧 $\widehat{P_0Q_0}$ 与 $\widehat{P_0Q_1}$ 相内切于 P_0 ; (2) P_0, Q_0, P_1, Q_1 共圆。

练习 12.41 在坐标平面内, 从原点出发以同一初速度 v_0 和不同发射角 $\alpha (\alpha \in [0, \pi], \alpha \neq \frac{\pi}{2})$ 射出的质点, 在重力的作用下运动轨迹是抛物线, 所有这些抛物线组成一个抛物线族, 若两条抛物线在同一个交点处的切线互相垂直, 则称这个交点为正交点。证明: 此抛物线族的所有正交点的集合是一段椭圆弧, 并求此椭圆弧的方程 (确定变量取值范围)。

练习 12.42 直角 $\triangle ABC$ 斜边为 AB ，内切圆切 BC ， CA ， AB 分别于 D ， E ， F 点， AD 交内切圆于 P 点，若 $CP \perp BP$ ，求证： $PD = AE + AP$ 。

练习 12.43 已知 $BC \perp CD$ ，点 A 为 BD 中点，点 Q 在 BC 上， $AC = CQ$ ，又在 BQ 上找一点 R ，使 $BR = 2RQ$ ，在 QC 上找一点 S ，使 $QS = RQ$ ，求证： $\angle ASB = 2\angle DRC$ 。

第十三章 数列

13.1 基础知识

定义 13.1: 数列 按顺序给出的一列数称为数列，数列分有穷数列和无穷数列两种。数列 $\{a_n\}$ 的一般形式通常记作 $a_1, a_2, a_3, \dots, a_n$ 或 $a_1, a_2, a_3, \dots, a_n, \dots$ ，其中 a_1 叫做数列的首项， a_n 是关于 n 的具体表达式，称为数列的通项。

定理 13.1: 数列通项与前 n 项和的关系 若 S_n 表示数列 $\{a_n\}$ 的前 n 项和，则 $S_1 = a_1$ ，当 $n > 1$ 时， $a_n = S_n - S_{n-1}$ 。

定义 13.2: 等差数列 如果对任意的正整数 n ，都有 $a_{n+1} - a_n = d$ （常数），则 $\{a_n\}$ 称为等差数列， d 叫做公差。

若三个数 a, b, c 成等差数列，即 $2b = a + c$ ，则称 b 为 a 和 c 的等差中项，若公差为 d ，则 $a = b - d$ ， $c = b + d$ 。

定理 13.2: 等差数列的性质 等差数列具有以下性质:

1. 通项公式: $a_n = a_1 + (n-1)d$;
2. 前 n 项和公式: $S_n = \frac{n(a_1+a_n)}{2} = na_1 + \frac{n(n-1)}{2}d$;
3. 通项拓展: $a_n - a_m = (n-m)d$, 其中 n, m 为正整数;
4. 项数和性质: 若 $n+m=p+q$, 则 $a_n + a_m = a_p + a_q$;
5. 对任意正整数 p, q , 恒有 $a_p - a_q = (p-q)(a_2 - a_1)$;
6. 若 A, B 至少有一个不为零, 则 $\{a_n\}$ 是等差数列的充要条件是 $S_n = An^2 + Bn$ 。

定义 13.3: 等比数列 若对任意的正整数 n , 都有 $\frac{a_{n+1}}{a_n} = q$, 则 $\{a_n\}$ 称为等比数列, q 叫做公比。

定理 13.3: 等比数列的性质 等比数列具有以下性质:

1. 通项公式: $a_n = a_1 q^{n-1}$;
2. 前 n 项和公式: 当 $q \neq 1$ 时, $S_n = \frac{a_1(1-q^n)}{1-q}$; 当 $q = 1$ 时, $S_n = na_1$;
3. 等比中项: 如果 a, b, c 成等比数列, 即 $b^2 = ac$ ($b \neq 0$), 则 b 叫做 a, c 的等比中项;
4. 项数和性质: 若 $m+n=p+q$, 则 $a_m a_n = a_p a_q$ 。

定义 13.4: 数列的极限 给定数列 $\{a_n\}$ 和实数 A , 若对任意的 $\varepsilon > 0$, 存在 M , 对任意的 $n > M (n \in \mathbb{N})$, 都有 $|a_n - A| < \varepsilon$, 则称 A 为 $n \rightarrow +\infty$ 时数列 $\{a_n\}$ 的极限, 记作 $\lim_{n \rightarrow \infty} a_n = A$ 。

定义 13.5: 无穷递缩等比数列 若等比数列 $\{a_n\}$ 的公比 q 满足 $|q| < 1$, 则称之为无穷递缩等比数列, 其所有项的和 (前 n 项和的极限) 为 $\frac{a_1}{1-q}$ 。

定理 13.4: 第一数学归纳法 给定命题 $p(n)$, 若:

1. $p(n_0)$ 成立;
2. 当 $p(n)$ 对 $n = k$ 成立时, 能推出 $p(n)$ 对 $n = k + 1$ 成立。

则命题 $p(n)$ 对一切自然数 $n \geq n_0$ 成立。

定理 13.5: 第二数学归纳法 给定命题 $p(n)$, 若:

1. $p(n_0)$ 成立;
2. 当 $p(n)$ 对一切 $n \leq k$ 的自然数 n 都成立时 ($k \geq n_0$), 可推出 $p(k+1)$ 成立。

则命题 $p(n)$ 对一切自然数 $n \geq n_0$ 成立。

定理 13.6: 齐次二阶线性递归数列的特征方程法 对于齐次二阶线性递归数列 $x_n = ax_{n-1} + bx_{n-2}$, 设它的特征方程 $x^2 = ax + b$ 的两个根为 α, β :

1. 若 $\alpha \neq \beta$, 则 $x_n = c_1\alpha^{n-1} + c_2\beta^{n-1}$, 其中 c_1, c_2 由初始条件 x_1, x_2 的值确定;
2. 若 $\alpha = \beta$, 则 $x_n = (c_1n + c_2)\alpha^{n-1}$, 其中 c_1, c_2 由初始条件 x_1, x_2 的值确定。

13.2 方法与例题

1. 不完全归纳法

例题 13.1 试给出以下几个数列的通项 (不要求证明):

1. $0, 3, 8, 15, 24, 35, \dots$;
2. $1, 5, 19, 65, \dots$;
3. $-1, 0, 3, 8, 15, \dots$ 。

例题 13.2 已知数列 $\{a_n\}$ 满足 $a_1 = \frac{1}{2}$, $a_1 + a_2 + \dots + a_n = n^2 a_n$ ($n \geq 1$), 求通项 a_n 。

例题 13.3 设 $0 < a < 1$, 数列 $\{a_n\}$ 满足 $a_1 = 1 + a$, $a_{n+1} = a + \frac{1}{a_n}$, 求证: 对任意 $n \in \mathbb{N}_+$ 有 $a_n > 1$ 。

2. 迭代法

例题 13.4 数列 $\{a_n\}$ 满足 $a_n + pa_{n-1} + qa_{n-2} = 0$, $n \geq 3$, $q \neq 0$, 求证: 存在常数 c , 使得 $a_{n+1}^2 + pa_{n+1} \cdot a_n + qa_n^2 + cq^n = 0$ 。

例题 13.5 已知 $a_1 = 0$, $a_{n+1} = 5a_n + \sqrt{24a_n^2 + 1}$, 求证: a_n 都是整数, $n \in \mathbb{N}_+$ 。

3. 数列求和法

例题 13.6 已知 $a_n = \frac{1}{4^n + 2^{100}}$ ($n = 1, 2, \dots$), 求 $S_{99} = a_1 + a_2 + \dots + a_{99}$ 。

例题 13.7 求和: $S_n = \frac{1}{1 \times 2 \times 3} + \frac{1}{2 \times 3 \times 4} + \cdots + \frac{1}{n(n+1)(n+2)}$ 。

例题 13.8 已知数列 $\{a_n\}$ 满足 $a_1 = a_2 = 1$, $a_{n+2} = a_{n+1} + a_n$, S_n 为数列 $\{\frac{a_n}{2^n}\}$ 的前 n 项和, 求证: $S_n < 2$ 。

4. 特征方程法

例题 13.9 已知数列 $\{a_n\}$ 满足 $a_1 = 3$, $a_2 = 6$, $a_{n+2} = 4a_{n+1} - 4a_n$, 求 a_n 。

例题 13.10 已知数列 $\{a_n\}$ 满足 $a_1 = 3$, $a_2 = 6$, $a_{n+2} = 2a_{n+1} + 3a_n$, 求通项 a_n 。

5. 构造等差或等比数列

例题 13.11 正数列 $a_0, a_1, \dots, a_n, \dots$ 满足 $\sqrt{a_n a_{n-2}} - \sqrt{a_{n-1} a_{n-2}} = 2a_{n-1} (n \geq 2)$ 且 $a_0 = a_1 = 1$, 求通项。

例题 13.12 已知数列 $\{x_n\}$ 满足 $x_1 = 2$, $x_{n+1} = \frac{x_n^2 + 2}{2x_n}$, $n \in \mathbb{N}_+$, 求通项。

13.3 A 组

练习 13.1 数列 $\{x_n\}$ 满足 $x_1 = 2$, $x_{n+1} = S_n + (n+1)$, 其中 S_n 为 $\{x_n\}$ 前 n 项和, 当 $n \geq 2$ 时, $x_n =$ _____。

练习 13.2 数列 $\{x_n\}$ 满足 $x_1 = \frac{1}{2}$, $x_{n+1} = \frac{2x_n}{3x_n+2}$, 则 $\{x_n\}$ 的通项 $x_n =$ _____。

练习 13.3 数列 $\{x_n\}$ 满足 $x_1 = 1, x_n = \frac{1}{2}x_{n-1} + 2n - 1 (n \geq 2)$, 则 $\{x_n\}$ 的通项 $x_n =$ _____。

练习 13.4 等差数列 $\{a_n\}$ 满足 $3a_8 = 5a_{13}$, 且 $a_1 > 0$, S_n 为前 n 项之和, 则当 S_n 最大时, $n =$ _____。

练习 13.5 等比数列 $\{a_n\}$ 前 n 项之和记为 S_n , 若 $S_{10} = 10, S_{30} = 70$, 则 $S_{40} =$ _____。

练习 13.6 数列 $\{x_n\}$ 满足 $x_{n+1} = x_n - x_{n-1} (n \geq 2)$, $x_1 = a, x_2 = b, S_n = x_1 + x_2 + \cdots + x_n$, 则 $S_{100} =$ _____。

练习 13.7 数列 $\{a_n\}$ 中, $S_n = a_1 + a_2 + \cdots + a_n = n^2 - 4n + 1$, 则 $|a_1| + |a_2| + \cdots + |a_{10}| =$ _____。

练习 13.8 若 $\frac{x_1}{x_1+1} = \frac{x_2}{x_2+3} = \frac{x_3}{x_3+5} = \cdots = \frac{x_n}{x_n+2n-1}$, 并且 $x_1 + x_2 + \cdots + x_n = 8$, 则 $x_1 =$ _____。

练习 13.9 等差数列 $\{a_n\}$ 、 $\{b_n\}$ 的前 n 项和分别为 S_n 和 T_n , 若 $\frac{S_n}{T_n} = \frac{2n}{3n+1}$, 则 $\lim_{n \rightarrow \infty} \frac{a_n}{b_n} =$ _____。

练习 13.10 若 $n! = n(n-1) \cdots 2 \cdot 1$, 则 $\sum_{n=1}^{2007} (-1)^n \frac{n^2+n+1}{n!} =$ _____。

练习 13.11 若 $\{a_n\}$ 是无穷等比数列, a_n 为正整数, 且满足 $a_5 + a_6 = 48$, $\log_2 a_2 \cdot \log_2 a_3 + \log_2 a_2 \cdot \log_2 a_5 + \log_2 a_3 \cdot \log_2 a_6 + \log_2 a_5 \cdot \log_2 a_6 = 36$, 求 $\left\{\frac{1}{a_n}\right\}$ 的通项。

练习 13.12 已知数列 $\{a_n\}$ 是公差不为零的等差数列, 数列 $\{a_{b_n}\}$ 是公比为 q 的等比数列, 且 $b_1 = 1$, $b_2 = 5$, $b_3 = 17$, 求: (1) q 的值; (2) 数列 $\{b_n\}$ 的前 n 项和 S_n 。

13.4 B 组

练习 13.13 已知函数 $f(x) = \begin{cases} x + \frac{1}{2} & (x \leq \frac{1}{2}) \\ 2x - 1 & (\frac{1}{2} < x < 1) \\ x - 1 & (x \geq 1) \end{cases}$, 数列 $\{a_n\}$ 满足 $a_1 = \frac{7}{3}$, $a_{n+1} = f(a_n) (n \in \mathbb{N}^+)$, 则 $a_{2006} =$ _____。

练习 13.14 已知数列 $\{a_n\}$ 满足 $a_1 = 1$, $a_n = a_1 + 2a_2 + 3a_3 + \cdots + (n-1)a_{n-1} (n \geq 2)$, 则 $\{a_n\}$ 的通项 $a_n = \begin{cases} 1 & (n = 1) \\ \text{_____} & (n \geq 2) \end{cases}$ 。

练习 13.15 若 $a_n = n^2 + \lambda n$ 且 $\{a_n\}$ 是递增数列, 则实数 λ 的取值范围是 _____。

练习 13.16 设正项等比数列 $\{a_n\}$ 的首项 $a_1 = \frac{1}{2}$, 前 n 项和为 S_n , 且 $2^{10}S_{30} - (2^{10} + 1)S_{20} + S_{10} = 0$, 则 $a_n =$ _____。

练习 13.17 已知 $\lim_{n \rightarrow \infty} \frac{3^n}{3^{n+1} + (a-1)^n} = \frac{1}{3}$, 则实数 a 的取值范围是 _____。

练习 13.18 数列 $\{a_n\}$ 满足 $a_{n+1} = 3a_n + n (n \in \mathbb{N}^+)$, 存在 _____ 个 a_1 值, 使 $\{a_n\}$ 成等差数列; 存在 _____ 个 a_1 值, 使 $\{a_n\}$ 成等比数列。

练习 13.19 已知 $a_n = \frac{n-\sqrt{401}}{n-\sqrt{402}} (n \in \mathbb{N}^*)$, 则在数列 $\{a_n\}$ 的前 50 项中, 最大项与最小项分别是 _____。

练习 13.20 有 4 个数, 其中前三个数成等差数列, 后三个数成等比数列, 并且第一个数与第四个数的和是 16, 第二个数与第三个数的和是 12, 则这四个数分别为 _____。

练习 13.21 设 $\{a_n\}$ 是由正数组成的数列, 对于所有自然数 n , a_n 与 2 的等差中项等于 S_n 与 2 的等比中项, 则 $a_n =$ _____。

| **练习 13.22** 在公比大于 1 的等比数列中, 最多连续有 _____ 项是在 100 与 1000 之间的整数。

| **练习 13.23** 已知数列 $\{a_n\}$ 中, $a_n \neq 0$, 求证: 数列 $\{a_n\}$ 成等差数列的充要条件是 $\frac{1}{a_1 a_2} + \frac{1}{a_2 a_3} + \frac{1}{a_3 a_4} + \cdots + \frac{1}{a_n a_{n+1}} = \frac{n}{a_1 a_{n+1}} (n \geq 2)$ 恒成立。

练习 13.24 已知数列 $\{a_n\}$ 和 $\{b_n\}$ 中有 $a_n = a_{n-1}b_n$, $b_n = \frac{b_{n-1}}{1-a_{n-1}^2} (n \geq 2)$, 当 $a_1 = p$, $b_1 = q (p > 0, q > 0)$ 且 $p + q = 1$ 时, (1) 求证: $a_n > 0$, $b_n > 0$ 且 $a_n + b_n = 1 (n \in \mathbb{N})$; (2) 求证: $a_{n+1} = \frac{a_n}{a_n + 1}$; (3) 求数列 $\lim_{n \rightarrow \infty} b_n$ 。

练习 13.25 是否存在常数 a, b, c , 使题设等式

$$1 \cdot 2^2 + 2 \cdot 3^2 + \cdots + n \cdot (n+1)^2 = \frac{n(n+1)}{12} (an^2 + bn + c)$$

对于一切自然数 n 都成立? 证明你的结论。

13.5 C 组

练习 13.26 设等差数列的首项及公差均为非负整数，项数不少于 3，且各项和为 97^2 ，这样的数列共有 _____ 个。

练习 13.27 设数列 $\{x_n\}$ 满足 $x_1 = 1$, $x_n = \frac{4x_{n-1}+2}{2x_{n-1}+7}$, 则通项 $x_n =$ _____。

练习 13.28 设数列 $\{a_n\}$ 满足 $a_1 = 3$, $a_n > 0$, 且 $3a_n^2 = a_{n-1}^5$, 则通项 $a_n =$ _____。

练习 13.29 已知数列 $a_0, a_1, a_2, \dots, a_n, \dots$ 满足关系式 $(3 - a_{n+1}) \cdot (6 + a_n) = 18$, 且 $a_0 = 3$, 则 $\sum_{i=0}^n \frac{1}{a_i} =$ _____。

练习 13.30 等比数列 $a + \log_2 3, a + \log_4 3, a + \log_8 3$ 的公比为 _____。

练习 13.31 各项均为实数的等差数列的公差为 4, 其首项的平方与其余各项之和不超 100, 这样的数列至多有 _____ 项。

练习 13.32 数列 $\{a_n\}$ 满足 $a_1 = 2, a_2 = 6$, 且 $\frac{a_{n+2} + a_n}{a_{n+1} + 1} = 2$, 则 $\lim_{n \rightarrow \infty} \frac{\sqrt{a_1} + \sqrt{a_2} + \cdots + \sqrt{a_n}}{n^2} =$ _____。

练习 13.33 数列 $\{a_n\}$ 称为等差比数列, 当且仅当此数列满足 $a_0 = 0$, $\{a_{n+1} - qa_n\}$ 构成公比为 q 的等比数列, q 称为此等差比数列的差比。那么, 由 100 以内的自然数构成等差比数列而差比大于 1 时, 项数最多有 _____ 项。

练习 13.34 设 $h \in \mathbb{N}_+$, 数列 $\{a_n\}$ 定义为: $a_0 = 1, a_{n+1} = \begin{cases} \frac{a_n}{2} & a_n \text{ 为偶数} \\ a_n + h & a_n \text{ 为奇数} \end{cases}$ 。问: 对于怎样的 h , 存在大于 0 的整数 n , 使得 $a_n = 1$?

练习 13.35 设 $\{a_k\}_{k \geq 1}$ 为一非负整数列，且对任意 $k \geq 1$ ，满足 $a_k \geq a_{2k} + a_{2k+1}$ 。(1) 求证：对任意正整数 n ，数列中存在 n 个连续项为 0；(2) 求出一个满足以上条件，且其存在无限个非零项的数列。

练习 13.36 求证：存在唯一的正整数数列 $a_1, a_2, \dots$ ，使得

$$a_1 = 1, a_2 > 1, a_{n+1}(a_{n+1} - 1) = \frac{a_n a_{n+2}}{\sqrt[3]{a_n a_{n+2} - 1} + 1} - 1.$$

13.6 D 组

练习 13.37 设 a_n 为下述自然数 N 的个数: N 的各位数字之和为 n 且每位数字只能取 1, 3 或 4, 求证: a_{2n} 是完全平方数, 这里 $n = 1, 2, \dots$ 。

练习 13.38 设 $a_1, a_2, \dots, a_n$ 表示整数 $1, 2, \dots, n$ 的任一排列, $f(n)$ 是这些排列中满足如下性质的排列数目: 1) $a_1 = 1$; 2) $|a_i - a_{i+1}| \leq 2, i = 1, 2, \dots, n-1$ 。试问 $f(2007)$ 能否被 3 整除?

练习 13.39 设数列 $\{a_n\}$ 和 $\{b_n\}$ 满足 $a_0 = 1$, $b_0 = 0$, 且

$$\begin{cases} a_{n+1} = 7a_n + 6b_n - 3, \\ b_{n+1} = 8a_n + 7b_n - 4, \end{cases} \quad n = 0, 1, 2, \dots$$

求证: $a_n (n = 0, 1, 2, \dots)$ 是完全平方数。

练习 13.40 无穷正实数数列 $\{x_n\}$ 具有以下性质: $x_0 = 1$, $x_{i+1} \leq x_i (i = 0, 1, 2, \dots)$ 。(1) 求证: 对具有上述性质的任一数列, 总能找到一个 $n \geq 1$ 使 $\frac{x_0^2}{x_1} + \frac{x_1^2}{x_2} + \dots + \frac{x_{n-1}^2}{x_n} \geq 3.999$ 均成立; (2) 寻求这样的数列使不等式 $\frac{x_0^2}{x_1} + \frac{x_1^2}{x_2} + \dots + \frac{x_{n-1}^2}{x_n} < 4$ 对任一 n 均成立。

练习 13.41 设 $x_1, x_2, \dots, x_n$ 是各项都不大于 M 的正整数序列且满足 $x_k = |x_{k-1} - x_{k-2}| (k = 3, 4, \dots, n)$ 。试问这样的序列最多有多少项？

练习 13.42 设 $a_1 = a_2 = \frac{1}{3}$ ，且当 $n = 3, 4, 5, \dots$ 时， $a_n = \frac{(1-2a_{n-2})a_{n-1}^2}{2a_{n-1}^2 - 4a_{n-2}a_{n-1}^2 + a_{n-2}}$ 。(i) 求数列 $\{a_n\}$ 的通项公式；(ii) 求证： $\frac{1}{a_n} - 2$ 是整数的平方。

练习 13.43 整数列 $u_0, u_1, u_2, \dots$ 满足 $u_0 = 1$, 且对每个正整数 n , $u_{n+1}u_{n-1} = ku_n$, 这里 k 是某个固定的正整数。如果 $u_{2000} = 2000$, 求 k 的所有可能的值。

练习 13.44 求证: 存在无穷有界数列 $\{x_n\}$, 使得对任何不同的 m, k , 有 $|x_m - x_k| \geq \frac{1}{|m-k|}$ 。

练习 13.45 已知 n 个正整数 $a_1, a_2, \dots, a_n$ 和实数 q , 其中 $0 < q < 1$, 求证: n 个实数 $b_1, b_2, \dots, b_n$ 满足: (1) $a_k < b_k (k = 1, 2, \dots, n)$; (2) $q < \frac{b_{k+1}}{b_k} < \frac{1}{q} (k = 1, 2, \dots, n)$; (3) $b_1 + b_2 + \dots + b_n < \frac{1+q}{1-q} (a_1 + a_2 + \dots + a_n)$ 。

第十四章 极限与导数

14.1 基础知识

定义 14.1: 极限的定义 极限有如下两类核心定义:

1. 数列极限: 若数列 $\{u_n\}$ 满足, 对任意给定的正数 ε , 总存在正数 m , 当 $n > m$ 且 $n \in \mathbb{N}$ 时, 恒有 $|u_n - A| < \varepsilon$ 成立 (A 为常数), 则称 A 为数列 $\{u_n\}$ 当 n 趋向于无穷大时的极限, 记为 $\lim_{n \rightarrow \infty} u_n = A$, 或 $u_n \rightarrow A (n \rightarrow \infty)$ 。若数列的极限不存在, 则称数列是发散的;
2. 函数极限: 给定函数 $f(x)$, 如果对于任意给定的正数 ε , 总存在正数 δ , 当 $0 < |x - x_0| < \delta$ 时, 恒有 $|f(x) - A| < \varepsilon$ 成立, 则称 A 是 $f(x)$ 当 $x \rightarrow x_0$ 时的极限, 记作 $\lim_{x \rightarrow x_0} f(x) = A$ 。类似可定义: - $\lim_{x \rightarrow +\infty} f(x)$ (x 趋向于正无穷时的极限); - $\lim_{x \rightarrow -\infty} f(x)$ (x 趋向于负无穷时的极限); - 右极限 $\lim_{x \rightarrow x_0^+} f(x) = A$ ($x > x_0$ 且趋向于 x_0 时的极限); - 左极限 $\lim_{x \rightarrow x_0^-} f(x) = A$ ($x < x_0$ 且趋向于 x_0 时的极限)。

定理 14.1: 极限的四则运算法则 如果 $\lim_{x \rightarrow x_0} f(x) = a$, $\lim_{x \rightarrow x_0} g(x) = b$, 那么:

1. $\lim_{x \rightarrow x_0} [f(x) \pm g(x)] = a \pm b$;
2. $\lim_{x \rightarrow x_0} [f(x) \cdot g(x)] = ab$;
3. $\lim_{x \rightarrow x_0} \frac{f(x)}{g(x)} = \frac{a}{b} (b \neq 0)$ 。

定义 14.2: 函数的连续性 如果函数 $f(x)$ 在 $x = x_0$ 处满足以下三个条件: 1. $f(x)$ 在 $x = x_0$ 处有定义; 2. $\lim_{x \rightarrow x_0} f(x)$ 存在; 3. $\lim_{x \rightarrow x_0} f(x) = f(x_0)$, 则称 $f(x)$ 在 $x = x_0$ 处连续。

定理 14.2: 最大值最小值定理 如果 $f(x)$ 是闭区间 $[a, b]$ 上的连续函数, 那么 $f(x)$ 在 $[a, b]$ 上有最大值和最小值。

定义 14.3: 导数的定义 若函数 $f(x)$ 在 x_0 附近有定义, 当自变量 x 在 x_0 处取得增量 Δx (Δx 充分小) 时, 因变量 y 随之取得增量 $\Delta y = f(x_0 + \Delta x) - f(x_0)$ 。若 $\lim_{\Delta x \rightarrow 0} \frac{\Delta y}{\Delta x}$ 存在, 则称 $f(x)$ 在 x_0 处可导, 此极限值称为 $f(x)$ 在点 x_0 处的导数 (或变化率), 记作 $f'(x_0)$ 、 $y'|_{x=x_0}$ 或 $\frac{dy}{dx}|_{x=x_0}$, 即:

$$f'(x_0) = \lim_{x \rightarrow x_0} \frac{f(x) - f(x_0)}{x - x_0}$$

由定义知, $f(x)$ 在点 x_0 连续是 $f(x)$ 在 x_0 可导的必要条件。若 $f(x)$ 在区间 I 上每一点都可导, 则称它在此区间上可导。

导数的几何意义: $f(x)$ 在点 x_0 处的导数 $f'(x_0)$ 等于曲线 $y = f(x)$ 在点 $P(x_0, f(x_0))$ 处切线的斜率。

定理 14.3: 常用函数的导数公式 以下为常见函数的导数公式 (c 为常数, $a > 0$ 且 $a \neq 1$):

1. $(c)' = 0$;
2. $(x^\alpha)' = \alpha x^{\alpha-1}$ (α 为任意常数);
3. $(\sin x)' = \cos x$;
4. $(\cos x)' = -\sin x$;
5. $(a^x)' = a^x \ln a$;
6. $(e^x)' = e^x$;
7. $(\log_a x)' = \frac{1}{x \ln a}$;
8. $(\ln x)' = \frac{1}{x}$ 。

定理 14.4: 导数的运算法则 若 $u(x)$ 、 $v(x)$ 在 x 处可导, 且 $u(x) \neq 0$, 则:

1. $[u(x) \pm v(x)]' = u'(x) \pm v'(x)$;
2. $[u(x)v(x)]' = u'(x)v(x) + u(x)v'(x)$;
3. $[cu(x)]' = c \cdot u'(x)$ (c 为常数);
4. $\left[\frac{1}{u(x)}\right]' = -\frac{u'(x)}{u^2(x)}$;
5. $\left[\frac{v(x)}{u(x)}\right]' = \frac{u(x)v'(x) - u'(x)v(x)}{u^2(x)}$ 。

定理 14.5: 复合函数求导法则 设函数 $y = f(u)$, $u = \varphi(x)$, 若 $\varphi(x)$ 在 x 处可导, $f(u)$ 在对应点 $u = \varphi(x)$ 处可导, 则复合函数 $y = f[\varphi(x)]$ 在点 x 处可导, 且:

$$(f[\varphi(x)])' = f'[\varphi(x)] \cdot \varphi'(x)$$

定理 14.6: 导数与函数的性质

1. 可导必连续: 若 $f(x)$ 在区间 I 上可导, 则 $f(x)$ 在 I 上连续;
2. 单调性判定: - 若对一切 $x \in (a, b)$ 有 $f'(x) > 0$, 则 $f(x)$ 在 (a, b) 上单调递增; - 若对一切 $x \in (a, b)$ 有 $f'(x) < 0$, 则 $f(x)$ 在 (a, b) 上单调递减。

定理 14.7: 极值的必要条件 若函数 $f(x)$ 在 x_0 处可导, 且在 x_0 处取得极值, 则 $f'(x_0) = 0$ 。

定理 14.8: 极值的第一充分条件 设 $f(x)$ 在 x_0 处连续, 在 x_0 的邻域 $(x_0 - \delta, x_0 + \delta)$ 内可导:

1. 若当 $x \in (x_0 - \delta, x_0)$ 时 $f'(x) \leq 0$, 当 $x \in (x_0, x_0 + \delta)$ 时 $f'(x) \geq 0$, 则 $f(x)$ 在 x_0 处取得极小值;
2. 若当 $x \in (x_0 - \delta, x_0)$ 时 $f'(x) \geq 0$, 当 $x \in (x_0, x_0 + \delta)$ 时 $f'(x) \leq 0$, 则 $f(x)$ 在 x_0 处取得极大值。

定理 14.9: 极值的第二充分条件 设 $f(x)$ 在 x_0 的某邻域 $(x_0 - \delta, x_0 + \delta)$ 内一阶可导, 在 $x = x_0$ 处二阶可导, 且 $f'(x_0) = 0$, $f''(x_0) \neq 0$:

1. 若 $f''(x_0) > 0$, 则 $f(x)$ 在 x_0 处取得极小值;
2. 若 $f''(x_0) < 0$, 则 $f(x)$ 在 x_0 处取得极大值。

定理 14.10: 罗尔中值定理 若函数 $f(x)$ 满足: 1. 在 $[a, b]$ 上连续; 2. 在 (a, b) 上可导; 3. $f(a) = f(b)$, 则存在 $\xi \in (a, b)$, 使 $f'(\xi) = 0$ 。

定理 14.11: 拉格朗日中值定理 若 $f(x)$ 在 $[a, b]$ 上连续, 在 (a, b) 上可导, 则存在 $\xi \in (a, b)$, 使:

$$f'(\xi) = \frac{f(b) - f(a)}{b - a}$$

定理 14.12: 曲线凸性的充分条件 设函数 $f(x)$ 在开区间 I 内具有二阶导数:

1. 若对任意 $x \in I$ 有 $f''(x) > 0$, 则曲线 $y = f(x)$ 在 I 内是下凸的 (凹函数);
2. 若对任意 $x \in I$ 有 $f''(x) < 0$, 则曲线 $y = f(x)$ 在 I 内是上凸的 (凸函数)。

定理 14.13: 琴生不等式 设 $\alpha_1, \alpha_2, \dots, \alpha_n \in \mathbb{R}^+$, 且 $\alpha_1 + \alpha_2 + \dots + \alpha_n = 1$:

1. 若 $f(x)$ 是 $[a, b]$ 上的凸函数, 则对 $x_1, x_2, \dots, x_n \in [a, b]$ 有:

$$f(\alpha_1 x_1 + \alpha_2 x_2 + \dots + \alpha_n x_n) \geq \alpha_1 f(x_1) + \alpha_2 f(x_2) + \dots + \alpha_n f(x_n)$$

2. 若 $f(x)$ 是 $[a, b]$ 上的凹函数, 则对 $x_1, x_2, \dots, x_n \in [a, b]$ 有:

$$f(\alpha_1 x_1 + \alpha_2 x_2 + \dots + \alpha_n x_n) \leq \alpha_1 f(x_1) + \alpha_2 f(x_2) + \dots + \alpha_n f(x_n)$$

14.2 方法与例题

例题 14.1 求下列极限: (1) $\lim_{n \rightarrow \infty} \left(\frac{1}{n^2} + \frac{2}{n^2} + \cdots + \frac{n}{n^2} \right)$; (2) $\lim_{n \rightarrow \infty} \frac{a^n}{1+a^n} \ (a > 0)$; (3) $\lim_{n \rightarrow \infty} \left(\frac{1}{\sqrt{n^2+1}} + \frac{1}{\sqrt{n^2+2}} + \cdots \right)$; (4) $\lim_{n \rightarrow \infty} \sqrt{n}(\sqrt{n+1} - \sqrt{n})$ 。

例题 14.2 求下列极限: (1) $\lim_{n \rightarrow \infty} (1+x)(1+x^2)(1+x^{2^2}) \cdots (1+x^{2^n}) \ (|x| < 1)$; (2) $\lim_{x \rightarrow 1} \left(\frac{3}{1-x^3} - \frac{1}{1-x} \right)$; (3) $\lim_{x \rightarrow 1} \frac{x^2-1}{\sqrt{3-x}-\sqrt{1+x}}$ 。

例题 14.3 设 $f(x)$ 在 $(-\infty, +\infty)$ 内有定义, 且恒满足 $f(x+1) = 2f(x)$, 又当 $x \in [0, 1)$ 时, $f(x) = x(1-x)^2$, 试讨论 $f(x)$ 在 $x = 2$ 处的连续性。

例题 14.4 求过点 $(2, 0)$ 且与曲线 $y = \frac{1}{x}$ 相切的直线方程。

例题 14.5 求下列函数的导数: (1) $y = \sin(3x + 1)$; (2) $y = \frac{5x^2 + 3x - \sqrt{x}}{x}$; (3) $y = e^{\cos 2x}$; (4) $y = \ln(x + \sqrt{x^2 - 1})$; (5) $y = (1 - 2x)^x$ ($x > 0, x < \frac{1}{2}$)。

例题 14.6 设 $a > 0$, 求函数 $f(x) = \sqrt{x} - \ln(x + a)$ ($x \in (0, +\infty)$) 的单调区间。

例题 14.7 设 $x \in (0, \frac{\pi}{2})$, 求证: $\sin x + \tan x > 2x$ 。

例题 14.8 设 $f(x) = a \ln x + bx^2 + x$ 在 $x_1 = 1$ 和 $x_2 = 2$ 处都取得极值, 试求 a 与 b 的值, 并指出这时 $f(x)$ 在 x_1 与 x_2 处是取得极大值还是极小值。

例题 14.9 设 $x \in [0, \pi]$, $y \in [0, 1]$, 试求函数 $f(x, y) = (2y - 1) \sin x + (1 - y) \sin[(1 - y)x]$ 的最小值。

14.3 A 组

练习 14.1 计算 $\lim_{n \rightarrow \infty} \frac{2^{n+1} + 3^{n+1}}{2^n + 3^n}$ 。

练习 14.2 已知 $\lim_{n \rightarrow \infty} \left(\frac{n^2+1}{n+1} - an - b \right) = 2$, 求 $a - b$ 的值。

练习 14.3 计算 $\lim_{n \rightarrow \infty} \frac{1 + \cos \frac{\pi}{2(n+1)}}{n} + \lim_{x \rightarrow +\infty} \frac{3x^{\frac{3}{2}} - 4x + 1}{3x - 2x^{\frac{3}{2}} + 2}$ 。

练习 14.4 计算 $\lim_{x \rightarrow 1} \frac{x^{n+1} - (n+1)x + n}{(x-1)^2}$ 。

练习 14.5 计算 $\lim_{n \rightarrow \infty} \frac{2+(-1)^n}{n} + \lim_{x \rightarrow +\infty} (\sqrt{x^2+1} - \sqrt{x^2-1})$ 。

练习 14.6 若 $f(x)$ 是定义在 $(-\infty, +\infty)$ 上的偶函数, 且 $f'(0)$ 存在, 则 $f'(0) = ?$

练习 14.7 函数 $f(x)$ 在 $(-\infty, +\infty)$ 上可导, 且 $f'(2) = 1$, 求 $\lim_{h \rightarrow 0} \frac{f(2+h) - f(2-h)}{2h}$ 。

练习 14.8 若曲线 $f(x) = x^4 - x$ 在点 P 处的切线平行于直线 $3x - y = 0$, 则点 P 坐标为?

练习 14.9 函数 $f(x) = x - 2\sin x$ 的单调递增区间是?

练习 14.10 函数 $f(x) = \ln \sqrt{\frac{1-x^2}{1+x^2}}$ 的导数为?

练习 14.11 若曲线 $y = \frac{1}{(x^2-ax)^2}$ 在点 $M(2, \frac{1}{4})$ 处的切线的斜率为 $\frac{1}{4}$, 求实数 a 的值。

| **练习 14.12** 求 $\sin 29^\circ$ 的近似值。

| **练习 14.13** 设 $0 < b < a < \frac{\pi}{2}$, 求证: $\frac{\sin a}{\sin b} < \frac{a}{b} < \frac{\tan a}{\tan b}$ 。

14.4 B 组

练习 14.14 计算 $\lim_{n \rightarrow \infty} \frac{1+2+4+\cdots+2^{n-1}}{1+3+3^2+\cdots+3^{n-1}}$ 。

练习 14.15 计算 $\lim_{x \rightarrow +\infty} \left(\frac{x^3}{2x^2-1} - \frac{x^2}{2x+1} \right)$ 。

练习 14.16 函数 $f(x) = 2x^3 - 6x^2 + 7$ 的单调递增区间是？

练习 14.17 函数 $y = \frac{e^x - e^{-x}}{e^x + e^{-x}}$ 的导数是?

练习 14.18 函数 $f(x)$ 在 x_0 邻域内可导, a, b 为实常数, 若 $f'(x_0) = c$, 则

$$\lim_{\Delta x \rightarrow 0} \frac{f(x_0 + a\Delta x) - f(x_0 - b\Delta x)}{\Delta x} = ?$$

练习 14.19 函数 $f(x) = \frac{1}{2}e^x(\sin x + \cos x)$, $x \in [0, \frac{\pi}{2}]$ 的值域为?

| 练习 14.20 过抛物线 $x^2 = 2py$ 上一点 (x_0, y_0) 的切线方程为?

| 练习 14.21 当 $x > 0$ 时, 比较大小: $\ln(x+1)$ 与 $x - \frac{x^2}{2}$ 。

| 练习 14.22 函数 $f(x) = x^5 - 5x^4 + 5x^3 + 1$, $x \in [-1, 2]$ 的最大值为? 最小值为?

练习 14.23 曲线 $y = e^{-x} (x \geq 0)$ 在点 $M(t, e^{-t})$ 处的切线 l 与 x 轴、 y 轴所围成的三角形面积为 $S(t)$, 则 $S(t)$ 的最大值为?

练习 14.24 若 $x > 0$, 求证: $(x^2 - 1) \ln x \geq (x - 1)^2$ 。

练习 14.25 函数 $y = f(x)$ 在区间 $(0, +\infty)$ 内可导, 导函数 $f'(x)$ 是减函数, 且 $f'(x) > 0$, $x_0 \in (0, +\infty)$, $y = kx + m$ 是曲线 $y = f(x)$ 在点 $(x_0, f(x_0))$ 处的切线方程, 另设 $g(x) = kx + m$ 。(1) 用 x_0 、 $f(x_0)$ 、 $f'(x_0)$ 表示 m ; (2) 证明: 当 $x \in (0, +\infty)$ 时, $g(x) \geq f(x)$; (3) 若关于 x 的不等式 $x^2 + 1 \geq ax + b \geq \frac{3}{2}x^{\frac{2}{3}}$ 在 $(0, +\infty)$ 上恒成立, 其中 a 、 b 为实数, 求 b 的取值范围及 a 、 b 所满足的关系。

练习 14.26 设各项为正的无穷数列 $\{x_n\}$ 满足 $\ln x_n + \frac{1}{x_{n+1}} < 1$ ($n \in \mathbb{N}_+$), 证明: $x_n \leq 1$ ($n \in \mathbb{N}_+$)。

14.5 C 组

练习 14.27 设 $M_n = \{0.\overline{a_1 a_2 \cdots a_n} \mid a_i \text{ 只取 } 0 \text{ 或 } 1 \ (i = 1, 2, \cdots, n-1), a_n = 1\}$, 其中 $0.\overline{a_1 a_2 \cdots a_n}$ 表示十进制 n 位纯小数。 T_n 是 M_n 中元素的个数, S_n 是 M_n 中所有元素的和, 则 $\lim_{n \rightarrow \infty} \frac{S_n}{T_n} = ?$

练习 14.28 若 $(1 - 2^x)^9$ 展开式的第 3 项为 288, 则 $\lim_{n \rightarrow \infty} \left(\frac{1}{x} + \frac{1}{x^2} + \cdots + \frac{1}{x^n} \right) = ?$

练习 14.29 设 $f(x)$ 、 $g(x)$ 分别是定义在 $\mathbb{R}$ 上的奇函数和偶函数, 当 $x < 0$ 时, $f'(x)g(x) + f(x)g'(x) > 0$, 且 $g(-3) = 0$, 则不等式 $f(x)g(x) < 0$ 的解集为?

练习 14.30 曲线 $y = 2 - \frac{1}{2}x^2$ 与 $y = \frac{1}{4}x^3 - 2$ 的交点处的切线夹角是?

练习 14.31 已知 $a \in \mathbb{R}^+$, 函数 $f(x) = x^2 e^{ax}$ 的单调递增区间为?

练习 14.32 已知 $f(x) = \frac{x}{1+x^2}$ 在 $(a, 3-a^2)$ 上有最大值, 则 a 的取值范围是?

练习 14.33 当 $x \in (1, 2]$ 时, $f(x) = \frac{x}{2x-1} > a$ ($a > 0$) 恒成立, 则 $y = \lg(a^2 - a + 3)$ 的最小值为?

练习 14.34 已知 $f(x) = \ln(e^x + a)$ ($a > 0$), 若对任意 $x \in [\ln(3a), \ln(4a)]$, 不等式 $m - f^{-1}(x) + \ln[f'(x)] < 0$ 恒成立, 则实数 m 的取值范围是?

练习 14.35 已知函数 $f(x) = \ln(1+x) - x$, $g(x) = x \ln x$ 。(1) 求函数 $f(x)$ 的最大值; (2) 设 $0 < a < b$, 证明: $0 < g(a) + g(b) - 2g\left(\frac{a+b}{2}\right) < (b-a) \ln 2$ 。

练习 14.36 (1) 设函数 $f(x) = x \log_2 x + (1-x) \log_2 (1-x)$ ($0 < x < 1$), 求 $f(x)$ 的最小值; (2) 设正数 $p_1, p_2, \dots, p_{2^n}$ 满足 $p_1 + p_2 + \dots + p_{2^n} = 1$, 求证: $p_1 \log_2 p_1 + p_2 \log_2 p_2 + \dots + p_{2^n} \log_2 p_{2^n} \geq -n$ 。

练习 14.37 若函数 $g_A(x)$ 的定义域 $A = [a, b]$, 且 $g_A(x) = \left(\frac{x}{a} - 1\right)^2 + \left(\frac{b}{x} - 1\right)^2$, 其中 a, b 为任意的正实数, 且 $a < b$ 。(1) 求 $g_A(x)$ 的最小值; (2) 讨论 $g_A(x)$ 的单调性; (3) 若 $x_1 \in I_k = [k^2, (k+1)^2]$, $x_2 \in I_{k+1} = [(k+1)^2, (k+2)^2]$, 证明: $g_{I_k}(x_1) + g_{I_{k+1}}(x_2) > \frac{4}{k(k+1)}$ 。

14.6 D 组

练习 14.38 证明下列不等式: (1) $x - \frac{x^2}{2} < \ln(x+1) < x - \frac{x^2}{2(1+x)}$ ($x > 0$); (2) $\frac{\tan x}{x} > \frac{x}{\sin x}$ ($x \in (0, \frac{\pi}{2})$)。

练习 14.39 当 $0 < a \leq b \leq c \leq d$ 时, 求 $f(a, b, c, d) = \frac{a^b \cdot b^c \cdot c^d \cdot d^a}{b^a \cdot c^b \cdot d^c \cdot a^d}$ 的最小值。

练习 14.40 已知 $x, y \in (0, 1)$, 求证: $x^y + y^x > 1$ 。

第十五章 排列组合与概率

15.1 基础知识

定义 15.1: 加法原理 做一件事有 n 类办法, 在第 1 类办法中有 m_1 种不同的方法, 在第 2 类办法中有 m_2 种不同的方法, $\dots$, 在第 n 类办法中有 m_n 种不同的方法, 那么完成这件事一共有 $N = m_1 + m_2 + \dots + m_n$ 种不同的方法。

定义 15.2: 乘法原理 做一件事, 完成它需要分 n 个步骤, 第 1 步有 m_1 种不同的方法, 第 2 步有 m_2 种不同的方法, $\dots$, 第 n 步有 m_n 种不同的方法, 那么完成这件事共有 $N = m_1 \times m_2 \times \dots \times m_n$ 种不同的方法。

定义 15.3: 排列与排列数 - 排列: 从 n 个不同元素中, 任取 $m(m \leq n)$ 个元素, 按照一定顺序排成一列, 叫做从 n 个不同元素中取出 m 个元素的一个排列; - 排列数: 从 n 个不同元素中取出 $m(m \leq n)$ 个元素的所有排列个数, 用 A_n^m 表示, 即

$$A_n^m = n(n-1)\cdots(n-m+1) = \frac{n!}{(n-m)!}$$

其中 $m, n \in \mathbb{N}$ 且 $m \leq n$ 。

注: 一般地, $A_n^0 = 1$, $0! = 1$, $A_n^n = n!$ 。

定理 15.1: 圆周排列数公式 n 个不同元素的圆周排列数为 $\frac{A_n^n}{n} = (n-1)!$ 。

定义 15.4: 组合与组合数 - 组合: 从 n 个不同元素中, 任取 $m(m \leq n)$ 个元素并成一组, 叫做从 n 个不同元素中取出 m 个元素的一个组合 (即不计顺序地取出 m 个构成原集合的一个子集); - 组合数: 从 n 个不同元素中取出 $m(m \leq n)$ 个元素的所有组合的个数, 用 C_n^m 表示, 即

$$C_n^m = \frac{n(n-1) \cdots (n-m+1)}{m!} = \frac{n!}{m!(n-m)!}$$

定理 15.2: 组合数的基本性质 组合数满足以下性质:

1. $C_n^m = C_n^{n-m}$;
2. $C_{n+1}^m = C_n^m + C_n^{m-1}$;
3. $C_n^0 + C_n^1 + \cdots + C_n^n = \sum_{k=0}^n C_n^k = 2^n$;
4. $C_k^k + C_{k+1}^k + \cdots + C_{k+m}^k = C_{k+m+1}^{k+1}$;
5. $C_n^k C_k^m = C_n^m C_{n-m}^{k-m} \quad (k \geq m)$ 。

定理 15.3: 不定方程正整数解个数 不定方程 $x_1 + x_2 + \cdots + x_n = r$ 的正整数解的个数为 C_{r-1}^{n-1} 。

定理 15.4: 不定方程非负整数解个数 不定方程 $x_1 + x_2 + \cdots + x_n = r$ 的非负整数解的个数为 C_{n+r-1}^r 。

定理 15.5: 可重组数公式 从 n 个不同元素中任取 m 个允许元素重复出现的组合（称为 n 个不同元素的 m 可重组合），其组合数为 C_{n+m-1}^m 。

定理 15.6: 二项式定理 若 $n \in \mathbb{N}_+$, 则

$$(a+b)^n = C_n^0 a^n + C_n^1 a^{n-1}b + C_n^2 a^{n-2}b^2 + \cdots + C_n^r a^{n-r}b^r + \cdots + C_n^n b^n$$

其中第 $r+1$ 项 $T_{r+1} = C_n^r a^{n-r}b^r$, C_n^r 称为二项式系数。

定义 15.5: 随机事件与概率 - 随机事件: 在一定条件下可能发生也可能不发生的事件叫随机事件; - 概率: 在大量重复进行同一试验时, 事件 A 发生的频率 $\frac{m}{n}$ 总是接近于某个常数, 在它附近摆动, 这个常数叫做事件 A 发生的概率, 记作 $P(A)$, 满足 $0 \leq P(A) \leq 1$ 。

定理 15.7: 等可能事件的概率 如果一次试验中共有 n 种等可能出现的结果, 其中事件 A 包含的结果有 m 种, 那么事件 A 的概率为 $P(A) = \frac{m}{n}$ 。

定义 15.6: 互斥事件与概率加法公式 - 互斥事件 (不相容事件): 不可能同时发生的两个事件; - 概率加法公式: 如果事件 $A_1, A_2, \dots, A_n$ 彼此互斥, 那么 $A_1, A_2, \dots, A_n$ 中至少有一个发生的概率为

$$P(A_1 + A_2 + \dots + A_n) = P(A_1) + P(A_2) + \dots + P(A_n)$$

定义 15.7: 对立事件 事件 A, B 为互斥事件, 且必有一个发生, 则 A, B 叫对立事件, 记 A 的对立事件为 $\bar{A}$ 。由定义知 $P(A) + P(\bar{A}) = 1$ 。

定义 15.8: 相互独立事件与概率乘法公式 - 相互独立事件: 事件 A (或 B) 是否发生对事件 B (或 A) 发生的概率没有影响的两个事件; - 概率乘法公式: 两个相互独立事件同时发生的概率, 等于每个事件发生的概率的积, 即 $P(A \cdot B) = P(A) \cdot P(B)$; - 推广: 若事件 $A_1, A_2, \dots, A_n$ 相互独立, 那么这 n 个事件同时发生的概率为

$$P(A_1 \cdot A_2 \cdot \dots \cdot A_n) = P(A_1) \cdot P(A_2) \cdot \dots \cdot P(A_n)$$

定义 15.9: 独立重复试验与二项分布 - 独立重复试验: n 次重复试验中, 每次试验结果的概率都不依赖于其他各次试验的结果, 称这 n 次试验是独立的; - 二项分布概率公式: 如果在一次试验中, 某事件发生的概率为 p , 那么在 n 次独立重复试验中, 这个事件恰好发生 k 次的概率为

$$P(\xi = k) = C_n^k p^k (1-p)^{n-k}$$

此时称 ξ 服从二项分布, 记作 $\xi \sim B(n, p)$, 其数学期望 $E\xi = np$, 方差 $D\xi = np(1-p)$ (记 $q = 1-p$)。

定义 15.10: 几何分布 在独立重复试验中, 某事件第一次发生时所做试验的次数 ξ 是一个随机变量, 若在一次试验中该事件发生的概率为 p , 则 $P(\xi = k) = q^{k-1}p$ ($k = 1, 2, \dots, q = 1-p$), 称 ξ 服从几何分布, 其数学期望 $E\xi = \frac{1}{p}$, 方差 $D\xi = \frac{q}{p^2}$ 。

定义 15.11: 离散型随机变量的分布列、期望与方差 - 分布列: 设离散型随机变量 ξ 可能取的值为 $x_1, x_2, \dots, x_i, \dots$, ξ 取每一个值 $x_i (i = 1, 2, \dots)$ 的概率 $P(\xi = x_i) = p_i$, 则下表称为 ξ 的概率分布 (分布列):

ξ	x_1	x_2	x_3	$\cdots$	x_i	$\cdots$
P	p_1	p_2	p_3	$\cdots$	p_i	$\cdots$

- 数学期望 (均值): $E\xi = x_1p_1 + x_2p_2 + \cdots + x_np_n + \cdots$; - 方差: $D\xi = (x_1 - E\xi)^2p_1 + (x_2 - E\xi)^2p_2 + \cdots + (x_n - E\xi)^2p_n + \cdots$; - 标准差: $\sqrt{D\xi}$ 。

15.2 方法与例题

例题 15.1 有 $2n$ 个人参加收发电报培训，每两个人结为一对互发互收，有多少种不同的结对方式？

例题 15.2 图 13-1 所示中没有电流通过电流表，其原因仅因为电阻断路的可能性共有几种？

例题 15.3 10 个节目中有 6 个演唱 4 个舞蹈，要求每两个舞蹈之间至少安排一个演唱，有多少种不同的安排节目演出顺序的方式？

例题 15.4 从 $1, 2, \dots, 14$ 中, 按从小到大的顺序取出 a_1, a_2, a_3 , 使同时满足 $a_2 - a_1 \geq 3$, $a_3 - a_2 \geq 3$, 那么所有符合要求的不同取法有多少种?

例题 15.5 已知集合 $A = \{1, 2, 3, \dots, 10\}$, 求 A 的所有非空子集的元素个数之和。

例题 15.6 由数字 $1, 2, 3$ 组成 n 位数 ($n \geq 3$), 且在 n 位数中, $1, 2, 3$ 每一个至少出现 1 次, 这样的 n 位数有多少个?

例题 15.7 用 1,2,3 三个数字来构造 n 位数，但不允许有两个紧挨着的 1 出现在 n 位数中，能构造出多少个这样的 n 位数？

例题 15.8 $m, n, r \in \mathbb{N}_+$ ，证明： $C_{n+m}^r = C_n^0 C_m^r + C_n^1 C_m^{r-1} + C_n^2 C_m^{r-2} + \cdots + C_n^r C_m^0$ 。

例题 15.9 一副三色牌共有 32 张，红、黄、蓝各 10 张，编号为 1,2,...,10，另有大、小王各一张，编号均为 0。从这副牌中任取若干张牌，按如下规则计算分值：每张编号为 k 的牌计为 2^k 分，若它们的分值之和为 2004，则称这些牌为一个“好牌”组，求好牌组的个数。

| **例题 15.10** 证明: $C_{2^m-1}^k$ 是奇数 ($k \geq 1$)。

| **例题 15.11** 对 $n \geq 2$, 证明: $2^n < C_{2n}^n < 4^n$ 。

| **例题 15.12** 若 $n \in \mathbb{N}$ 且 $n \geq 2$, 求证: $2 < (1 + \frac{1}{n})^n < 3$ 。

例题 15.13 证明: $\sum_{k=0}^n C_{n-k}^{m-k} \cdot C_k^h = C_{n+1}^{m+1}$ ($h \leq m \leq n$)。

例题 15.14 如果某批产品中有 a 件次品和 b 件正品, 采用有放回的抽样方式从中抽取 n 件产品, 恰好有 k 件是次品的概率是多少?

例题 15.15 将一枚硬币掷 5 次, 正面朝上恰好一次的概率不为 0, 而且与正面朝上恰好两次的概率相同, 求恰好三次正面朝上的概率。

例题 15.16 甲、乙两个乒乓球运动员进行乒乓球比赛，已知每一局甲胜的概率为 0.6，乙胜的概率为 0.4，比赛时可以用三局二胜或五局三胜制，在哪一种比赛制度下，甲获胜的可能性大？

例题 15.17 有 A 、 B 两个口袋， A 袋中有 6 张卡片，其中 1 张写有 0，2 张写有 1，3 张写有 2； B 袋中有 7 张卡片，其中 4 张写有 0，1 张写有 1，2 张写有 2。从 A 袋中取出 1 张卡片， B 袋中取 2 张卡片，共 3 张卡片。求：(1) 取出 3 张卡片都写 0 的概率；(2) 取出的 3 张卡片数字之积是 4 的概率；(3) 取出的 3 张卡片数字之积的数学期望。

15.3 A 组

| 练习 15.1 三边长均为整数且最大边长为 11 的三角形有多少个?

| 练习 15.2 在正 2006 边形中, 所有边均不平行的对角线的条数为多少?

| 练习 15.3 用 $1, 2, 3, \dots, 9$ 这九个数字可组成多少个数字不重复且 8 和 9 不相邻的七位数?

| 练习 15.4 10 个人参加乒乓球赛, 分五组, 每组两个人, 有多少种分组方法?

| **练习 15.5** 以长方体的顶点为顶点的三棱锥的个数是多少?

| **练习 15.6** 今天是星期二, 再过 10^{1000} 天是星期几?

| **练习 15.7** 由 $(\sqrt{3}x + \sqrt[3]{2})^{100}$ 展开式所得的 x 的多项式中, 系数为有理数的共有多少项?

| **练习 15.8** 如果凸 n 边形 ($n \geq 4$) 的任意三条对角线不共点, 那么这些对角线在凸 n 边形内共有多少个交点?

练习 15.9 袋中有 a 个黑球与 b 个白球，随机地每次从中取出一球（不放回），第 k ($1 \leq k \leq a+b$) 次取到黑球的概率为多少？

练习 15.10 一个箱子里有 9 张卡片，分别标号为 1,2,...,9，从中任取 2 张，其中至少有一个为奇数的概率是多少？

练习 15.11 某人拿着 5 把钥匙去开门，有 2 把能打开。他逐个试，试三次之内打开房门的概率是多少？

练习 15.12 马路上有编号为 1,2,3,...,10 的十盏路灯，要将其中三盏关掉，但不能同时关掉相邻的两盏或三盏，也不能关掉两端的路灯，则满足条件的关灯方法种数是多少？

| **练习 15.13** a, b, c, d, e 五个人安排在一个圆桌周围就坐, 若 a, b 不相邻, 有多少种安排方式?

| **练习 15.14** 已知 i, m, n 是正整数, 且 $1 < i \leq m < n$, 证明: (1) $n^i A_m^i < m^i A_n^i$; (2) $(1+m)^n > (1+n)^m$ 。

| **练习 15.15** 一项“过关游戏”规定: 在第 n 关要抛掷一颗骰子 n 次, 如果这 n 次抛掷所得到的点数之和大于 2^n , 则算过关。问: (1) 某人在这项游戏中最多能过几关? (2) 他连过前三关的概率是多少? (注: 骰子是一个在各面上分别有 1, 2, 3, 4, 5, 6 点数的均匀正方体)

15.4 B 组

练习 15.16 若 $n \in \{1, 2, \dots, 100\}$ 且 n 是其各位数字和的倍数, 则这种 n 有多少个?

练习 15.17 从 $(-3, -2, -1, 0, 1, 2, 3, 4)$ 中任取 3 个不同元素作为二次函数 $y = ax^2 + bx + c$ 的系数, 能组成过原点, 且顶点在第一或第三象限的抛物线有多少条?

练习 15.18 四面体的顶点和各棱的中点共 10 个点, 在其中任取 4 个不共面的点, 有多少种取法?

练习 15.19 三个人传球，从甲开始发球，每次接球后将球传给另外两人中的任意一个，经 5 次传球后，球仍回到甲手中的传法有多少种？

练习 15.20 一条铁路原有 m 个车站（含起点、终点），新增加 n 个车站（ $n > 1$ ），客运车票相应地增加了 58 种，原有车站有多少个？

练习 15.21 将二项式 $(\sqrt{x} + \frac{1}{2\sqrt[3]{x}})^n$ 的展开式按降幂排列，若前三项系数成等差数列，则该展开式中 x 的幂指数是整数的项有多少个？

练习 15.22 从 1 到 9 这九个自然数中任两个分别作为对数的真数和底数，共可得到多少种不同的对数值？

练习 15.23 二项式 $(x - 2)^5$ 的展开式中系数最大的项为第几项，系数最小的项为第几项？

练习 15.24 有一批规格相同的均匀圆棒，每根被划分成长度相同的 5 节，每节用红、黄、蓝三色之一涂色，可以有多少种颜色不同的圆棒？（颠倒后相同的算同一种）

| **练习 15.25** 在 $1, 2, \dots, 2006$ 中随机选取 3 个数，能构成递增等差数列的概率是多少？

| **练习 15.26** 投掷一次骰子，出现点数 $1, 2, \dots, 6$ 的概率均为 $\frac{1}{6}$ ，连续掷 6 次，出现的点数之和为 35 的概率为多少？

练习 15.27 某列火车有 n 节旅客车厢，进站后站台上有 $m(m \geq n)$ 名旅客候车，每位旅客随意选择车厢上车，则每节车厢都有旅客上车的概率是多少？

练习 15.28 某地现有耕地 10000 公顷，规划 10 年后粮食单产比现在增加 22

15.5 C 组

练习 15.29 若 $0 < a < b < c < d < 500$, 有多少个有序的四元数组 (a, b, c, d) 满足 $a + d = b + c$ 且 $bc - ad = 93$?

练习 15.30 已知直线 $ax + by + c = 0$ 中的 a, b, c 是取自集合 $\{-3, -2, -1, 0, 1, 2, 3\}$ 中的 3 个不同的元素, 并且该直线倾斜角为锐角, 这样的直线条数是多少?

练习 15.31 已知 $A = \{0, 1, 2, 3, 4, 5, 6, 7\}$, 映射 $f: A \rightarrow A$ 满足: (1) 若 $i \neq j$, 则 $f(i) \neq f(j)$; (2) 若 $i + j = 7$, 则 $f(i) + f(j) = 7$, 这样的映射的个数为多少?

练习 15.32 $1, 2, 3, 4, 5$ 的排列 a_1, a_2, a_3, a_4, a_5 具有性质: 对于 $1 \leq i \leq 4$, $a_1, a_2, \dots, a_i$ 不构成 $1, 2, \dots, i$ 的某个排列, 这种排列的个数是多少?

练习 15.33 骰子的六个面标有 $1, 2, \dots, 6$ 这六个数字, 相邻两个面上的数字之差的绝对值叫变差, 变差的总和叫全变差 V , 则全变差 V 的最大值为多少, 最小值为多少?

练习 15.34 某次乒乓球单打比赛中, 原计划每两名选手恰比赛一场, 但有 3 名选手各比赛 2 场之后就退出了, 这样全部比赛只进行 50 场, 上述三名选手之间比赛场数为多少?

练习 15.35 如果 a, b, c, d 都属于 $1, 2, 3, 4$ 且 $a \neq b, b \neq c, c \neq d, d \neq a$; 且 a 是 a, b, c, d 中的最小值, 则不同的四位数 $abcd$ 的个数为多少?

练习 15.36 如果自然数 a 各位数字之和等于 7, 那么称 a 为“吉祥数”, 将所有的吉祥数从小到大排成
一列 $a_1, a_2, a_3, \dots$, 若 $a_n = 2005$, 则 $a_{5n} = ?$

练习 15.37 投掷一次骰子, 出现点数 $1, 2, \dots, 6$ 的概率均为 $\frac{1}{6}$, 连续掷 10 次, 出现的点数之和是 30 的概率为多少?

练习 15.38 将编号为 $1, 2, \dots, 9$ 这九个小球随机放置在圆周的九个等分点上, 每个等分点上各有一个小球, 设圆周上所有相邻两球的号码之差的绝对值之和为 S , 求 S 达到最小值的放法的概率 (注: 如果某种放法经旋转或镜面反射后可与另一放法重合, 则认为是相同的放法)。

练习 15.39 甲、乙两人轮流向同一目标射击, 第一次甲射击, 以后轮流射击, 甲每次击中的概率为 p ($0 < p < 1$), 乙每次击中的概率为 q ($0 < q < 1$), 求甲、乙首先击中的概率各是多少?

练习 15.40 设 $m, n \in \mathbb{N}$, $0 < m \leq n$, 求证: $2^{n-m}C_m^m + 2^{n-m-1}C_{m+1}^m + \dots + 2^0C_n^m = C_{n+1}^{m+1} + C_{n+1}^{m+2} + \dots + C_{n+1}^{n+1}$ 。

15.6 D 组

练习 15.41 100 张卡片上分别写有数字 1 到 100，一位魔术师把这 100 张卡片放入颜色分别是红色、白色、蓝色的三个盒子里，每个盒子里至少放入一张卡片。一位观众从三个盒子中挑出两个，并从中各选取一张卡片，然后宣布这两张卡片上的两个数的和数，魔术师知道这个和数之后，便能够指出哪一个没有被观众取出卡片的盒子。问：共有多少种放卡片的方法，使得这个魔术师总能够成功？（如果至少有一张卡片被放入不同颜色的盒子，两种方法被认为是不同的）

练习 15.42 设 $S = \{1, 2, \dots, 10\}$, $A_1, A_2, \dots, A_k$ 是 S 的 k 个子集合, 满足: (1) $|A_i| = 5, i = 1, 2, \dots, k$; (2) $|A_i \cap A_j| \leq 2, 1 \leq i < j \leq k$, 求 k 的最大值。

练习 15.43 求从集合 $\{1, 2, \dots, n\}$ 中任取满足下列条件的 k 个数 $\{j_1, j_2, \dots, j_k\}$ 的组合数: (1) $1 \leq j_1 < j_2 < \dots < j_k \leq n$; (2) $j_{h+1} - j_h \geq m$, $h = 1, 2, \dots, k-1$ (其中 $m > 1$ 为固定的正整数); (3) 存在 h_0 , $1 \leq h_0 \leq k-1$, 使得 $j_{h_0+1} - j_{h_0} \geq m+1$ 。

练习 15.44 设 $n = 2^{s_1} + 2^{s_2} + \dots + 2^{s_m}$, 其中 $s_1, s_2, \dots, s_m$ 都是正整数且 $s_1 < s_2 < \dots < s_m$, 求证: 组合数 $C_n^0, C_n^1, \dots, C_n^n$ 中奇数的个数等于 2^m 。

练习 15.45 $\frac{n(n+1)}{2}$ 个不同的数随机排成图 13-2 所示的三角形阵，设 M_k 是从上往下第 k 行中的最大数，求 $M_1 < M_2 < \cdots < M_n$ 的概率。

练习 15.46 证明： $\sum_{k=1}^{n-r+1} k C_{n-k}^{r-1} = C_{n+1}^{r+1}$ 。