

强基数学第三分册

目录

第三部分 第三分册	1
第十六章 平面几何	2
16.1 常用定理	2
16.2 方法与例题	6
16.3 A 组	10
第十七章 初等数论	14
17.1 常用定义定理	14
17.2 方法与例题	18
17.3 A 组	21
第十八章 排列组合	25
18.1 方法与例题	25
18.2 A 组	30

第三部分

第三分册

第十六章 平面几何

16.1 常用定理

定理 16.1: 梅涅劳斯定理 设 A' 、 B' 、 C' 分别是 $\triangle ABC$ 的三边 BC 、 CA 、 AB 或其延长线上的点, 若 A' 、 B' 、 C' 三点共线, 则:

$$\frac{BA'}{A'C} \cdot \frac{CB'}{B'A} \cdot \frac{AC'}{C'B} = 1$$

定理 16.2: 梅涅劳斯定理的逆定理 设 A' 、 B' 、 C' 分别是 $\triangle ABC$ 的三边 BC 、 CA 、 AB 或其延长线上的点, 若 $\frac{BA'}{A'C} \cdot \frac{CB'}{B'A} \cdot \frac{AC'}{C'B} = 1$, 则 A' 、 B' 、 C' 三点共线。

定理 16.3: 塞瓦定理 设 A' 、 B' 、 C' 分别是 $\triangle ABC$ 的三边 BC 、 CA 、 AB 或其延长线上的点, 若 AA' 、 BB' 、 CC' 三线平行或共点, 则:

$$\frac{BA'}{A'C} \cdot \frac{CB'}{B'A} \cdot \frac{AC'}{C'B} = 1$$

定理 16.4: 塞瓦定理的逆定理 设 A' 、 B' 、 C' 分别是 $\triangle ABC$ 的三边 BC 、 CA 、 AB 或其延长线上的点, 若 $\frac{BA'}{A'C} \cdot \frac{CB'}{B'A} \cdot \frac{AC'}{C'B} = 1$, 则 AA' 、 BB' 、 CC' 三线共点或互相平行。

定理 16.5: 角元形式的塞瓦定理 设 A' 、 B' 、 C' 分别是 $\triangle ABC$ 的三边 BC 、 CA 、 AB 所在直线上的点, 则 AA' 、 BB' 、 CC' 平行或共点的充要条件是:

$$\frac{\sin \angle BAA'}{\sin \angle A'AC} \cdot \frac{\sin \angle ACC'}{\sin \angle C'CB} \cdot \frac{\sin \angle CBB'}{\sin \angle B'BA} = 1$$

定理 16.6: 广义托勒密定理 设 $ABCD$ 为任意凸四边形, 则 $AB \cdot CD + BC \cdot AD \geq AC \cdot BD$, 当且仅当 A 、 B 、 C 、 D 四点共圆时取等号。

定理 16.7: 斯特瓦特定理 设 P 为 $\triangle ABC$ 的边 BC 上任意一点 (P 不同于 B 、 C)，则：

$$AP^2 = AB^2 \cdot \frac{PC}{BC} + AC^2 \cdot \frac{BP}{BC} - BP \cdot PC$$

定理 16.8: 西姆松定理 过三角形外接圆上异于三角形顶点的任意一点作三边的垂线，则三垂足共线 (此线称为西姆松线)。

定理 16.9: 西姆松定理的逆定理 若一点在三角形三边所在直线上的射影共线，则该点在三角形的外接圆上。

定理 16.10: 九点圆定理 三角形三条高的垂足、三边的中点以及垂心与顶点的三条连线段的中点，这九点共圆（此圆称为九点圆）。

定理 16.11: 蒙日定理 三条根轴交于一点或互相平行（到两圆的幂（即切线长）相等的点构成的集合为一条直线，这条直线称为根轴）。

定理 16.12: 欧拉定理 $\triangle ABC$ 的外心 O 、垂心 H 、重心 G 三点共线（此线称为欧拉线），且 $OG = \frac{1}{2}GH$ 。

16.2 方法与例题

例题 16.1 在 $\triangle ABC$ 中, $\angle ABC = 70^\circ$, $\angle ACB = 30^\circ$, P, Q 为 $\triangle ABC$ 内部两点, $\angle QBC = \angle QCB = 10^\circ$, $\angle PBQ = \angle PCB = 20^\circ$, 求证: A, P, Q 三点共线。

例题 16.2 在平行四边形 $ABCD$ 中, E, F 分别是 CD, BC 上的点, 且 $BE = DF$, BE 交 DF 于 P , 求证: AP 为 $\angle BPD$ 的平分线。

例题 16.3 AB 是 $\odot O$ 的一条弦, M 为 AB 中点, CD 、 EF 为过 M 的任意弦, CF 、 DE 分别交 AB 于 P 、 Q , 求证: $PM = MQ$ 。

例题 16.4 平面上每一点都以红、蓝两色之一染色, 证明: 存在这样的两个相似三角形, 它们的相似比为 1995, 而且每个三角形三个顶点同色。

例题 16.5 设 AD 、 BE 与 CF 为 $\triangle ABC$ 的内角平分线, D 、 E 、 F 在 $\triangle ABC$ 的边上, 如果 $\angle EDF = 90^\circ$, 求 $\angle BAC$ 的所有可能的值。

例题 16.6 设 P 是 $\triangle ABC$ 所在平面上的一点, G 是 $\triangle ABC$ 的重心, 求证: $PA + PB + PC > 3PG$ 。

例题 16.7 H 是 $\triangle ABC$ 的垂心, P 是任意一点, $HL \perp PA$ 交 PA 于 L 、交 BC 于 X ; $HM \perp PB$ 交 PB 于 M 、交 CA 于 Y ; $HN \perp PC$ 交 PC 于 N 、交 AB 于 Z , 求证: X 、 Y 、 Z 三点共线。

例题 16.8 直线 l 与 $\odot O$ 相离, P 为 l 上任意一点, PA 、 PB 为圆的两条切线 (A 、 B 为切点), 求证: 直线 AB 过定点。

16.3 A 组

练习 16.1 $\odot O_1$ 和 $\odot O_2$ 分别是 $\triangle ABC$ 的边 AB 、 AC 上的旁切圆， $\odot O_1$ 与 CB 、 CA 的延长线切于 E 、 G ， $\odot O_2$ 与 BC 、 BA 的延长线切于 F 、 H ，直线 EG 与 FH 交于点 P ，求证： $PA \perp BC$ 。

练习 16.2 设 $\odot O$ 的外切四边形 $ABCD$ 的对角线 AC 、 BD 的中点分别为 E 、 F ，求证： E 、 O 、 F 三点共线。

练习 16.3 已知两小圆 $\odot O_1$ 与 $\odot O_2$ 相外切且都与大圆 $\odot O$ 相内切, AB 是 $\odot O_1$ 与 $\odot O_2$ 的一条外公切线 (A, B 在 $\odot O$ 上), CD 是 $\odot O_1$ 与 $\odot O_2$ 的内公切线, $\odot O_1$ 与 $\odot O_2$ 相切于点 P , 且 P, C 在直线 AB 的同一侧, 求证: P 是 $\triangle ABC$ 的内心。

练习 16.4 $\triangle ABC$ 内有两点 M, N , 使得 $\angle MAB = \angle NAC$ 且 $\angle MBA = \angle NBC$, 求证:

$$\frac{AM \cdot AN}{AB \cdot AC} + \frac{BM \cdot BN}{BC \cdot BA} + \frac{CM \cdot CN}{CA \cdot CB} = 1$$

练习 16.5 $\triangle ABC$ 中, O 为外心, 三条高 AD 、 BE 、 CF 相交于点 H , 直线 ED 和 AB 相交于点 M , 直线 FD 和 AC 相交于点 N , 求证: (1) $OB \perp DF$, $OC \perp DE$; (2) $OH \perp MN$ 。

练习 16.6 设点 I 、 H 分别是锐角 $\triangle ABC$ 的内心和垂心, 点 B_1 、 C_1 分别是边 AC 、 AB 的中点。已知射线 B_1I 交边 AB 于点 B_2 ($B_2 \neq B$), 射线 C_1I 交 AC 的延长线于点 C_2 , B_2C_2 与 BC 相交于点 K , A_1 为 $\triangle BHC$ 的外心, 试证: A 、 I 、 A_1 三点共线的充要条件是 $\triangle BKB_2$ 和 $\triangle CKC_2$ 的面积相等。

练习 16.7 已知点 A_1, B_1, C_1 分别在直线 l_1 上, 点 A_2, B_2, C_2 分别在直线 l_2 上, B_2C_1 交 B_1C_2 于点 M , C_1A_2 交 A_1C_2 于点 N , B_1A_2 交 B_2A_1 于点 L , 求证: M, N, L 三点共线。

练习 16.8 $\triangle ABC$ 中, $\angle C = 90^\circ$, $\angle A = 30^\circ$, $BC = 1$, 求 $\triangle ABC$ 的内接三角形 (三个顶点分别在三条边上的三角形) 的最长边的最小值。

练习 16.9 $\triangle ABC$ 的垂心为 H , 外心为 O , 外接圆半径为 R , 顶点 A, B, C 关于对边 BC, CA, AB 的对称点分别为 A', B', C' , 求证: A', B', C' 三点共线的充要条件是 $OH = 2R$ 。

第十七章 初等数论

17.1 常用定义定理

定义 17.1: 整除的定义 设 $a, b \in \mathbb{Z}$, $a \neq 0$, 如果存在 $q \in \mathbb{Z}$ 使得 $b = aq$, 那么称 b 可被 a 整除, 记作 $a \mid b$, 且称 b 是 a 的倍数, a 是 b 的约数; 若 b 不能被 a 整除, 记作 $a \nmid b$ 。

定理 17.1: 带余数除法 设 a, b 是两个给定的整数, $a \neq 0$, 则一定存在唯一一对整数 q 与 r , 满足 $b = aq + r$, 其中 $0 \leq r < |a|$ 。当 $r = 0$ 时, $a \mid b$ 。

定理 17.2: 辗转相除法 设 u_0, u_1 是给定的两个整数, $u_1 \neq 0$, $u_1 \nmid u_0$, 由带余数除法可得以下 $k+1$ 个等式:

$$\left\{ \begin{array}{ll} u_0 = q_0 u_1 + u_2, & 0 < u_2 < |u_1|, \\ u_1 = q_1 u_2 + u_3, & 0 < u_3 < u_2, \\ u_2 = q_2 u_3 + u_4, & 0 < u_4 < u_3, \\ \vdots & \\ u_{k-2} = q_{k-2} u_{k-1} + u_k, & 0 < u_k < u_{k-1}, \\ u_{k-1} = q_{k-1} u_k + u_{k+1}, & 0 < u_{k+1} < u_k, \\ u_k = q_k u_{k+1}. & \end{array} \right.$$

定理 17.3: 辗转相除法的性质 由辗转相除法可得以下结论:

1. $u_{k+1} = (u_0, u_1)$ (即 u_{k+1} 是 u_0 与 u_1 的最大公约数);
2. 整数 $d \mid u_0$ 且 $d \mid u_1$ 的充要条件是 $d \mid u_{k+1}$;
3. 存在整数 x_0, x_1 , 使得 $u_{k+1} = x_0 u_0 + x_1 u_1$ 。

定理 17.4: 算术基本定理 若 $n > 1$ 且 n 为整数, 则 $n = p_1^{\alpha_1} p_2^{\alpha_2} \cdots p_k^{\alpha_k}$, 其中 $p_j (j = 1, 2, \dots, k)$ 是质数 (或称素数), 且在不计次序的意义下, 该表示是唯一的。

定义 17.2: 同余的定义 设 $m \neq 0$, 若 $m \mid (a - b)$, 即 $a - b = km$ ($k \in \mathbb{Z}$), 则称 a 与 b 模 m 同余, 记为 $a \equiv b \pmod{m}$, 也称 b 是 a 对模 m 的剩余。

定义 17.3: 完全剩余系 一组数 $y_1, y_2, \dots, y_s$ 满足: 对任意整数 a , 有且仅有一个 y_j 是 a 对模 m 的剩余 (即 $a \equiv y_j \pmod{m}$), 则称 $y_1, y_2, \dots, y_s$ 为模 m 的完全剩余系。

定理 17.5: Fermat 小定理 若 p 为素数, $p \nmid a$ (即 $(a, p) = 1$), 则 $a^{p-1} \equiv 1 \pmod{p}$; 且对任意整数 a , 有 $a^p \equiv a \pmod{p}$ 。

定理 17.6: 欧拉定理 若 $(a, m) = 1$, 则 $a^{\varphi(m)} \equiv 1 \pmod{m}$, 其中 $\varphi(m)$ 称为欧拉函数。

定理 17.7: 欧拉函数值的计算公式 若 $m = p_1^{\alpha_1} p_2^{\alpha_2} \cdots p_k^{\alpha_k}$ (p_j 为互不相同的素数), 则:

$$\varphi(m) = m \prod_{i=1}^k \left(1 - \frac{1}{p_i}\right)$$

定理 17.8: 孙子定理 (中国剩余定理) 设 $m_1, m_2, \dots, m_k$ 是 k 个两两互质的正整数, 则同余组:

$$x \equiv b_1 \pmod{m_1}, \quad x \equiv b_2 \pmod{m_2}, \quad \dots, \quad x \equiv b_k \pmod{m_k}$$

有唯一解, 解为:

$$x \equiv M_1 M'_1 b_1 + M_2 M'_2 b_2 + \cdots + M_k M'_k b_k \pmod{M}$$

其中: - $M = m_1 m_2 \cdots m_k$, - $M_i = \frac{M}{m_i}$ ($i = 1, 2, \dots, k$), - M'_i 是满足 $M_i M'_i \equiv 1 \pmod{m_i}$ 的整数 (即 M'_i 是 M_i 对模 m_i 的逆元)。

17.2 方法与例题

例题 17.1 有 n 个整数，它们的和为 0，乘积为 n ($n > 1$)，求证： $4 \mid n$ 。

例题 17.2 试求所有的正整数 n ，使方程 $x^3 + y^3 + z^3 = nx^2y^2z^2$ 有正整数解。

| **例题 17.3** 确定并证明方程 $a^2 + b^2 + c^2 = a^2b^2$ 的所有整数解。

| **例题 17.4** 证明：存在无穷多个正整数，它们不能表示成少于 10 个奇数的平方和。

例题 17.5 证明：方程 $x^4 + y^4 = z^2$ 没有正整数解。

例题 17.6 求出所有的有序正整数数对 (m, n) ，使得 $\frac{n^3+1}{mn-1}$ 是整数。

例题 17.7 能否选择 1983 个不同的正整数，都不大于 10^5 ，且其中没有 3 个正整数是等差数列中的连续项？证明你的结论。

17.3 A 组

练习 17.1 试求所有正整数对 (a, b) , 使得 $(ab - a^2 + b + 1) \mid (ab + 1)$ 。

练习 17.2 设 $a, b, c \in \mathbb{N}_+$, 且 $a^2 + b^2 - abc$ 是不超过 $c + 1$ 的一个正整数, 求证: $a^2 + b^2 - abc$ 是一个完全平方数。

| **练习 17.3** 确定所有的正整数数对 (x, y) , 使得 $x \leq y$, 且 $x^2 + 1$ 是 y 的倍数, $y^2 + 1$ 是 x 的倍数。

| **练习 17.4** 求所有的正整数 n , 使得存在正整数 m , 满足 $(2^n - 1) \mid (m^2 + 9)$ 。

练习 17.5 求证：存在一个具有如下性质的正整数的集合 A ：对于任何由无限多个素数组成的集合 S ，存在 $k \geq 2$ 及正整数 $m \in A$ 和 $n \notin A$ ，使得 m 和 n 均为 S 中 k 个不同元素的乘积。

练习 17.6 求最小的正整数 n ($n \geq 4$)，满足：从任意 n 个不同的整数中能选出四个不同的数 a, b, c, d ，使 $20 \mid (a + b - c - d)$ 。

练习 17.7 对于正整数 a, n , 定义 $F_n(a) = q + r$, 其中 q, r 为非负整数, $a = qn + r$ 且 $0 \leq r \leq n$ 。求最大正整数 A , 使得存在正整数 $n_1, n_2, \dots, n_6$, 对任意正整数 $a \leq A$, 都有 $F_{n_6}(F_{n_5}(F_{n_4}(F_{n_3}(F_{n_2}(F_{n_1}(a))))) = 1$, 并证明你的结论。

练习 17.8 设 x 是一个 n 位数, 问: 是否总存在非负整数 $y \leq 9$ 和 m , 使得 $10^{m+1}z + 10x + y$ 是一个完全平方数? 证明你的结论。(注: 原 PDF 中 z 表述不明确, 按原文保留)

练习 17.9 设 $a, b, c, d \in \mathbb{N}_+$, 且 $a > b > c > d$, 满足 $ac + bd = (b + d + a - c)(b + d - a + c)$, 证明: $ab + cd$ 不是素数。

第十八章 排列组合

18.1 方法与例题

例题 18.1 设整数 $n \geq 4$, $a_1, a_2, \dots, a_n$ 是区间 $(0, 2n)$ 内 n 个不同的整数, 证明: 存在集合 $\{a_1, a_2, \dots, a_n\}$ 的一个子集, 它的所有元素之和能被 $2n$ 整除。

例题 18.2 在 $n \times n$ 的方格表的每个小方格内写有一个非负整数, 并且在某一行和某一列的交叉点处如果写有 0, 那么该行与该列所填的所有数之和不小于 n 。证明: 表中所有数之和不小于 $\frac{1}{2}n^2$ 。

例题 18.3 设正整数 n 是奇数，在黑板上写下数 $1, 2, \dots, 2n$ ，然后取其中任意两个数 a, b ，擦去这两个数，并写上 $|a - b|$ 。证明：最后留下的是一个奇数。

例题 18.4 数 $a_1, a_2, \dots, a_n$ 中每一个是 1 或 -1，并且有 $S = a_1 a_2 a_3 a_4 + a_2 a_3 a_4 a_5 + \dots + a_n a_1 a_2 a_3 = 0$ ，证明： $4 \mid n$ 。

例题 18.5 是否存在一个无穷正整数数列 $a_1 < a_2 < a_3 < \cdots$, 使得对任意整数 A , 数列 $\{a_n + A\}_{n=1}^{\infty}$ 中仅有有限个素数?

例题 18.6 一个多面体共有偶数条棱, 试证: 可以在它的每条棱上标上一个箭头, 使得对每个顶点, 指向它的箭头数目是偶数。

例题 18.7 能否在 5×5 方格表内找到一条线路，它由某格中心出发，经过每个方格恰好一次，再回到出发点，并且途中不经过任何方格的顶点？

例题 18.8 试证：任何不自交的五边形都位于它的某条边的同一侧。

例题 18.9 由 2×2 的方格纸去掉一个方格余下的图形称为拐形，用这种拐形去覆盖 5×7 的方格板，每个拐形恰覆盖 3 个方格，可以重叠但不能超出方格板的边界。问：能否使方格板上每个方格被覆盖的层数都相同？说明理由。

例题 18.10 生产由六种颜色的纱线织成的双色布，在所生产的双色布中，每种颜色的纱线至少与其他三种颜色的纱线搭配过。证明：可以挑出三种不同的双色布，它们包含所有的颜色。

18.2 A 组

练习 18.1 药房里有若干种药，其中一部分药是烈性的。药剂师用这些药配成 68 副药方，每副药方中恰有 5 种药，其中至少有一种是烈性的，并且使得任选 3 种药恰有一副药方包含它们。试问：全部药方中是否一定有一副药方至少含有 4 种烈性药？（证明或否定）

练习 18.2 21 个女孩和 21 个男孩参加一次数学竞赛：(1) 每一个参赛者最多解出 6 道题；(2) 对每一个女孩和每一个男孩至少有一道题被这一对孩子都解出。求证：有一道题至少有 3 个女孩和至少有 3 个男孩都解出。

练习 18.3 求证：存在无穷多个正整数 n ，使得可将 $3n$ 个数 $1, 2, \dots, 3n$ 排成数表：

$$\begin{array}{cccc} a_1 & a_2 & \cdots & a_n \\ b_1 & b_2 & \cdots & b_n \\ c_1 & c_2 & \cdots & c_n \end{array}$$

满足：(1) $a_1 + b_1 + c_1 = a_2 + b_2 + c_2 = \cdots = a_n + b_n + c_n$ ，且为 6 的倍数；(2) $a_1 + a_2 + \cdots + a_n = b_1 + b_2 + \cdots + b_n = c_1 + c_2 + \cdots + c_n$ ，且为 6 的倍数。

练习 18.4 给定正整数 n ，已知克数都是正整数的 k 块砝码和一台天平可以称出质量为 $1, 2, \dots, n$ 克的所有物品，求 k 的最小值 $f(n)$ 。

练习 18.5 空间中有 1989 个点，其中任何 3 点都不共线，把它们分成点数各不相同的 30 组，在任何三个不同的组中各取一点为顶点作三角形。试问：为使这种三角形的总数最大，各组的点数应分别为多少？

练习 18.6 在平面给定点 A_0 和 n 个向量 $\mathbf{a}_1, \mathbf{a}_2, \dots, \mathbf{a}_n$ ，且使 $\mathbf{a}_1 + \mathbf{a}_2 + \dots + \mathbf{a}_n = \mathbf{0}$ 。这组向量的每一个排列 $\mathbf{a}_{i_1}, \mathbf{a}_{i_2}, \dots, \mathbf{a}_{i_n}$ 都定义一个点集： $A_1, A_2, \dots, A_n = A_0$ ，使得 $\mathbf{a}_{i_1} = \overrightarrow{A_0 A_1}$ ， $\mathbf{a}_{i_2} = \overrightarrow{A_1 A_2}$ ， $\dots$ ， $\mathbf{a}_{i_n} = \overrightarrow{A_{n-1} A_n}$ 。求证：存在一个排列，使由它定义的所有点 $A_1, A_2, \dots, A_{n-1}$ 都在以 A_0 为角顶的某个 60° 角的内部和边上。

练习 18.7 设 $m, n, k \in \mathbb{N}$, 有 4 个酒杯, 容量分别为 m 、 n 、 k 和 $m+n+k$ 升, 允许进行如下操作: 将一个杯中的酒倒入另一杯中, 直至倒满或倒完为止。开始时, 大杯中装满酒而另 3 个杯子为空。问: 为使对任何 $S \in \mathbb{N}$ ($S < m+n+k$), 都可经过若干次操作, 使得某个杯子中恰有 S 升酒, 关于 m, n, k 的充分必要条件是什么?

练习 18.8 设有 30 个人坐在一张圆桌的周围, 其中的每个人都或者是白痴, 或者是聪明人。对在座的每个人都提问: “你右边的邻座是聪明人还是白痴?” 聪明人总是给出正确的答案, 而白痴既可能回答正确, 也可能回答不正确。已知白痴的个数不超过 F , 求总可以指出一位聪明人的最大的 F 。

练习 18.9 某班共有 30 名学生, 每名学生在班内都有同样多的朋友, 期末时任何两人的成绩都可分出优劣, 没有相同的。问: 比自己的多半朋友的成绩都要好的学生最多能有多少人?