

强基数学第一分册

目录

第一部分 第一分册	1
第一章 集合	2
1.1 基础知识	2
1.2 方法与例题	4
1.3 A 组	10
1.4 B 组	13
1.5 C 组	16
1.6 D 组	19
第二章 二次函数与命题	22
2.1 基础知识	22
2.2 方法与例题	25
2.3 A 组	28
2.4 B 组	30
2.5 C 组	32
第三章 函数	37
3.1 基础知识	37
3.2 方法与例题	40
3.3 A 组	43
3.4 B 组	46
3.5 C 组	50
3.6 D 组	56
第四章 常见初等函数	57
4.1 基础知识	57
4.2 方法与例题	59
4.3 A 组	62
4.4 B 组	65
4.5 C 组	68
4.6 D 组	76
第五章 不等式	79
5.1 基础知识	79
5.2 方法与例题	83
5.3 A 组	90
5.4 B 组	93

5.5	C 组	97
5.6	D 组	100
第六章	三角函数	102
6.1	基础知识	102
6.2	方法与例题	110
6.3	A 组	114
6.4	B 组	117
6.5	C 组	118
6.6	D 组	123
6.7	E 组	128
第七章	解三角形	130
7.1	基础知识	130
7.2	方法与例题	134
7.3	A 组	136
7.4	B 组	139
7.5	C 组	141
第八章	平面向量	145
8.1	基础知识	145
8.2	方法与例题	149
8.3	A 组	151
8.4	B 组	154
8.5	C 组	156
8.6	D 组	161
第九章	复数	162
9.1	基础知识	162
9.2	方法与例题	169
9.3	A 组	172
9.4	B 组	175
9.5	C 组	177
9.6	D 组	180

第一部分

第一分册

第一章 集合

1.1 基础知识

定义 1.1: 集合与元素 一般地，一组确定的、互异的、无序的对象全体构成集合，简称集，用大写字母来表示；集合中的各个对象称为元素，用小写字母来表示。元素 x 在集合 A 中，称 x 属于 A ，记为 $x \in A$ ，否则称 x 不属于 A ，记作 $x \notin A$ 。

例如，通常用 $\mathbb{N}, \mathbb{Z}, \mathbb{Q}, \mathbb{R}, \mathbb{Q}^+$ 分别表示自然数集、整数集、有理数集、实数集、正有理数集。不含任何元素的集合称为空集，用 $\emptyset$ 来表示。集合分为有限集和无限集两种。

集合的表示方法有：

- 列举法：将集合中的元素一一列举出来写在大括号内并用逗号隔开，如 $\{1, 2, 3\}$ ；
- 描述法：将集合中的元素的属性写在大括号内，例如 $\{x \mid x > 0\}$ 表示正实数集。

定义 1.2: 子集 对于两个集合 A 与 B ，如果集合 A 中的任何一个元素都是集合 B 中的元素，则 A 叫做 B 的子集，记为 $A \subseteq B$ ，例如 $\mathbb{N} \subseteq \mathbb{Z}$ 。

规定空集是任何集合的子集。如果 A 是 B 的子集， B 也是 A 的子集，则称 A 与 B 相等。如果 A 是 B 的子集，而且 B 中存在元素不属于 A ，则 A 叫 B 的真子集。

定义 1.3: 交集 $A \cap B = \{x \mid x \in A \text{ 且 } x \in B\}$ 。

定义 1.4: 并集 $A \cup B = \{x \mid x \in A \text{ 或 } x \in B\}$ 。

定义 1.5: 补集 若 $A \subseteq I$, 则 $\complement_I A = \{x \mid x \in I \text{ 且 } x \notin A\}$, $\complement_I A$ 称为 A 在 I 中的补集。

定义 1.6: 差集 $A \setminus B = \{x \mid x \in A \text{ 且 } x \notin B\}$ 。

定义 1.7: 区间 集合 $\{x \mid a < x < b, x \in \mathbb{R}, a < b\}$ 记作开区间 (a, b) ; 集合 $\{x \mid a \leq x \leq b, x \in \mathbb{R}, a < b\}$ 记作闭区间 $[a, b]$; 实数集 $\mathbb{R}$ 记作 $(-\infty, +\infty)$ 。

定理 1.1: 集合的运算性质 对任意集合 A, B, C , 有:

1. $A \cap (B \cup C) = (A \cap B) \cup (A \cap C)$;
2. $A \cup (B \cap C) = (A \cup B) \cap (A \cup C)$;
3. $\complement_I A \cup \complement_I B = \complement_I (A \cap B)$;
4. $\complement_I A \cap \complement_I B = \complement_I (A \cup B)$ 。

定理 1.2: 加法原理 做一件事有 n 类办法, 第一类办法中有 m_1 种不同的方法, 第二类办法中有 m_2 种不同的方法, $\dots$, 第 n 类办法中有 m_n 种不同的方法, 那么完成这件事一共有

$$N = m_1 + m_2 + \dots + m_n$$

种不同的方法。

定理 1.3: 乘法原理 做一件事分 n 个步骤, 第一步有 m_1 种不同的方法, 第二步有 m_2 种不同的方法, $\dots$, 第 n 步有 m_n 种不同的方法, 那么完成这件事一共有

$$N = m_1 \cdot m_2 \cdot \dots \cdot m_n$$

种不同的方法。

1.2 方法与例题

1.2.1 利用集合中元素的属性，检验元素是否属于集合

例题 1.1 设 $M = \{a \mid a = x^2 - y^2, x, y \in \mathbb{Z}\}$ ，求证：

1. $2k - 1 \in M, (k \in \mathbb{Z})$;
2. $4k - 2 \notin M, (k \in \mathbb{Z})$;
3. 若 $p \in M, q \in M$ ，则 $pq \in M$ 。

1.2.2 利用子集的定义证明集合相等

核心思路：先证 $A \subseteq B$ ，再证 $B \subseteq A$ ，则 $A = B$ 。

例题 1.2 设 A, B 是两个集合，又设集合 M 满足

$$A \cap M = B \cap M = A \cap B, \quad A \cup B \cup M = A \cup B$$

求集合 M (用 A, B 表示)。

1.2.3 分类讨论思想的应用

例题 1.3 已知 $A = \{x \mid x^2 - 3x + 2 = 0\}$, $B = \{x \mid x^2 - ax + a - 1 = 0\}$, $C = \{x \mid x^2 - mx + 2 = 0\}$, 若 $A \cup B = A$, $A \cap C = C$, 求 a, m 的取值。

1.2.4 计数原理的应用

例题 1.4 集合 A, B, C 是 $I = \{1, 2, 3, 4, 5, 6, 7, 8, 9, 0\}$ 的子集, 求解下列问题:

1. 若 $A \cup B = I$, 求有序集合对 (A, B) 的个数;
2. 求 I 的非空真子集的个数。

1.2.5 配对方法

例题 1.5 给定集合 $I = \{1, 2, 3, \dots, n\}$ 的 k 个子集: $A_1, A_2, \dots, A_k$, 满足任何两个子集的交集非空, 并且再添加 I 的任何一个其他子集后将不再具有该性质, 求 k 的值。

1.2.6 竞赛常用方法与例题

定理 1.4: 容斥原理 用 $|A|$ 表示集合 A 的元素个数, 则:

$$|A \cup B| = |A| + |B| - |A \cap B|$$

$$|A \cup B \cup C| = |A| + |B| + |C| - |A \cap B| - |A \cap C| - |B \cap C| + |A \cap B \cap C|$$

此结论可推广到 n 个集合的情况:

$$\left| \bigcup_{i=1}^n A_i \right| = \sum_{i=1}^n |A_i| - \sum_{1 \leq i < j \leq n} |A_i \cap A_j| + \sum_{1 \leq i < j < k \leq n} |A_i \cap A_j \cap A_k| - \cdots + (-1)^{n-1} \left| \bigcap_{i=1}^n A_i \right|$$

定义 1.8: 集合的划分 $A_1 \cup A_2 \cup \cdots \cup A_n = I$, 且 $A_i \cap A_j = \emptyset$ ($1 \leq i < j \leq n$), 则这些子集的全体叫做 I 的一个 n -划分。

定理 1.5: 抽屉原理 将 $mn+1$ 个元素放入 n ($n > 1$) 个抽屉, 必有一个抽屉放有不少于 $m+1$ 个元素, 也必有一个抽屉放有不多于 m 个元素; 将无穷多个元素放入 n 个抽屉, 必有一个抽屉放有无穷多个元素。

定理 1.6: 最小数原理 自然数集的任何非空子集必有最小数。

例题 1.6 求 $1, 2, 3, \dots, 100$ 中不能被 2、3、5 整除的数的个数。

例题 1.7 S 是集合 $\{1, 2, \dots, 2004\}$ 的子集, S 中的任意两个数的差不等于 4 或 7, 问 S 中最多含有多少个元素?

例题 1.8 求所有自然数 $n(n \geq 2)$, 使得存在实数 $a_1, a_2, \dots, a_n$ 满足:

$$\{|a_i - a_j| \mid 1 \leq i < j \leq n\} = \left\{1, 2, \dots, \frac{n(n-1)}{2}\right\}$$

例题 1.9 设 $A = \{1, 2, 3, 4, 5, 6\}$, $B = \{7, 8, 9, \dots, n\}$ 。在 A 中取三个数, B 中取两个数组成五个元素的集合 A_i , $i = 1, 2, \dots, 20$, 满足 $|A_i \cap A_j| \leq 2$ ($1 \leq i < j \leq 20$)。求 n 的最小值。

例题 1.10 集合 $\{1, 2, \dots, 3n\}$ 可以划分成 n 个互不相交的三元集合 $\{x, y, z\}$, 其中 $x + y = 3z$, 求满足条件的最小正整数 n 。

1.3 A 组

练习 1.1 给定三元集合 $\{1, x, x^2 - x\}$, 则实数 x 的取值范围是 _____。

练习 1.2 若集合 $A = \{x \mid ax^2 + 2x + 1 = 0, a \in \mathbb{R}, x \in \mathbb{R}\}$ 中只有一个元素, 则 $a =$ _____。

练习 1.3 集合 $B = \{1, 2, 3\}$ 的非空真子集有 _____ 个。

练习 1.4 已知集合 $M = \{x \mid x^2 - 3x + 2 = 0\}$, $N = \{x \mid ax + 1 = 0\}$, 若 $N \subseteq M$, 则由满足条件的实数 a 组成的集合 $P =$ _____。

练习 1.5 已知 $A = \{x \mid x < 2\}$, $B = \{x \mid x \leq a\}$, 且 $A \subseteq B$, 则常数 a 的取值范围是 _____。

练习 1.6 若非空集合 S 满足 $S \subseteq \{1, 2, 3, 4, 5\}$, 且若 $a \in S$, 则 $6 - a \in S$, 那么符合要求的集合 S 有 _____ 个。

练习 1.7 集合 $X = \{2n + 1 \mid n \in \mathbb{Z}\}$ 与 $Y = \{4k \pm 1 \mid k \in \mathbb{Z}\}$ 之间的关系是 _____。

练习 1.8 若集合 $A = \{x, xy, xy - 1\}$, 其中 $x \in \mathbb{Z}$, $y \in \mathbb{Z}$ 且 $y \neq 0$, 若 $0 \in A$, 则 A 中元素之和是 _____。

练习 1.9 集合 $P = \{x \mid x^2 + x - 6 = 0\}$, $M = \{x \mid mx - 1 = 0\}$, 且 $M \subsetneq P$, 则满足条件的 m 的值构成的集合为 _____。

练习 1.10 集合 $A = \{y \mid y = 2x + 1, x \in \mathbb{R}^+\}$, $B = \{y \mid y = -x^2 + 9, x \in \mathbb{R}\}$, 则 $A \cap B =$ _____。

练习 1.11 已知 S 是由实数构成的集合, 且满足: 1) $1 \notin S$; 2) 若 $a \in S$, 则 $\frac{1}{1-a} \in S$ 。如果 $S \neq \emptyset$, S 中至少含有多少个元素? 说明理由。

练习 1.12 已知 $A = \{(x, y) \mid y = a|x|\}$, $B = \{(x, y) \mid y = x + a\}$, $C = A \cap B$, 且 C 为单元素集合, 求实数 a 的取值范围。

1.4 B 组

练习 1.13 已知集合 $A = \{x, xy, x + y\}$, $B = \{0, |x|, y\}$, 且 $A = B$, 则 $x =$ _____, $y =$ _____。

练习 1.14 设全集 $I = \{1, 2, 3, 4, 5, 6, 7, 8, 9\}$, $A \subseteq I, B \subseteq I$, 且满足 $A \cap B = \{2\}$, $(\complement_I A) \cap (\complement_I B) = \{1, 9\}$, $(\complement_I A) \cap B = \{4, 6, 8\}$, 则 $A \cap (\complement_I B) =$ _____。

练习 1.15 已知集合 $A = \{x \mid 10 + 3x - x^2 \geq 0\}$, $B = \{x \mid m + 1 \leq x \leq 2m - 1\}$, 当 $A \cap B = \emptyset$ 时, 实数 m 的取值范围是 _____。

练习 1.16 若实数 a 为常数, 且

$$a \in A = \left\{ x \mid \frac{1}{\sqrt{ax^2 - x + 1}} = 1 \right\},$$

则 $a =$ _____。

练习 1.17 集合 $M = \{m^2, m+1, -3\}$, $N = \{m-3, 2m-1, m^2+1\}$, 若 $M \cap N = \{-3\}$, 则 $m =$ _____。

练习 1.18 集合 $A = \{a \mid a = 5x+3, x \in \mathbb{N}_+\}$, $B = \{b \mid b = 7y+2, y \in \mathbb{N}_+\}$, 则 $A \cap B$ 中的最小元素是 _____。

练习 1.19 集合 $A = \{x-y, x+y, xy\}$, $B = \{x^2+y^2, x^2-y^2, 0\}$, 且 $A = B$, 则 $x+y =$ _____。

练习 1.20 已知集合 $A = \left\{x \mid \frac{x+1}{2-x} < 0\right\}$, $B = \{x \mid px+4 < 0\}$, 且 $B \subseteq A$, 则 p 的取值范围是 _____。

练习 1.21 设集合 $A = \{(x, y) \mid y^2 - x - 1 = 0\}$, $B = \{(x, y) \mid 4x^2 + 2x - 2y + 5 = 0\}$, $C = \{(x, y) \mid y = kx + b\}$ 。问：是否存在 $k, b \in \mathbb{N}$, 使得 $(A \cup B) \cap C = \emptyset$? 并证明你的结论。

练习 1.22 集合 A 和 B 各含有 12 个元素, $A \cap B$ 含有 4 个元素, 试求同时满足下列条件的集合 C 的个数:

1. $C \subseteq A \cup B$ 且 C 中含有 3 个元素;
2. $C \cap A \neq \emptyset$ 。

练习 1.23 判断以下命题是否正确: 设 A, B 是平面上两个点集, $C_r = \{(x, y) \mid x^2 + y^2 \leq r^2\}$, 若对任何 $r \geq 0$, 都有 $C_r \cup A \subseteq C_r \cup B$, 则必有 $A \subseteq B$ 。证明你的结论。

1.5 C 组

练习 1.24 已知集合 $A = \{x \mid x < 0\}$, $B = \left\{z \mid z = \frac{m^2x-1}{mx+1}, x > 2\right\}$, $B \neq \emptyset$ 且 $B \subseteq A$, 则实数 m 的取值范围是 _____。

练习 1.25 集合 $A = \{1, 2, 3, \dots, 2n, 2n+1\}$ 的子集 B 满足: 对任意的 $x, y \in B$, $x+y \notin B$, 则集合 B 中元素个数的最大值是 _____。

练习 1.26 已知集合 $P = \{a, aq, aq^2\}$, $Q = \{a, a+d, a+2d\}$, 其中 $a \neq 0$, 且 $a \in \mathbb{R}$, 若 $P = Q$, 则实数 $q =$ _____。

练习 1.27 已知集合 $A = \{(x, y) \mid |x| + |y| = a, a > 0\}$, $B = \{(x, y) \mid |xy| + 1 = |x| + |y|\}$, 若 $A \cap B$ 是平面上正八边形的顶点所构成的集合, 则 $a =$ _____。

练习 1.28 集合 $M = \{u \mid u = 12m + 8n + 4l, m, l, n \in \mathbb{Z}\}$, 集合 $N = \{u \mid u = 20p + 16q + 12r, p, q, r \in \mathbb{Z}\}$, 则集合 M 与 N 的关系是 _____。

练习 1.29 设集合 $M = \{1, 2, 3, \dots, 1995\}$, 集合 A 满足: $A \subseteq M$, 且当 $x \in A$ 时, $15x \notin A$, 则 A 中元素最多有 _____ 个。

练习 1.30 非空集合 $A = \{x \mid 2a + 1 \leq x \leq 3a - 5\}$, $B = \{x \mid 3 \leq x \leq 22\}$, 则使 $A \subseteq A \cap B$ 成立的所有 a 的集合是 _____。

练习 1.31 已知集合 A, B, C (不必相异) 的并集 $A \cup B \cup C = \{1, 2, \dots, n\}$, 则满足条件的有序三元组 (A, B, C) 个数是 _____。

练习 1.32 已知集合 $A = \{(x, y) \mid ax + y = 1\}$, $B = \{(x, y) \mid x + ay = 1\}$, $C = \{(x, y) \mid x^2 + y^2 = 1\}$ 。问：当 a 取何值时, $(A \cup B) \cap C$ 为恰有 2 个元素的集合? 说明理由; 若改为 3 个元素集合, 结论如何?

练习 1.33 求集合 B 和 C , 使得 $B \cup C = \{1, 2, \dots, 10\}$, 并且 C 的元素乘积等于 B 的元素和。

练习 1.34 S 是 $\mathbb{Q}$ 的子集且满足: 若 $r \in \mathbb{Q}$, 则 $r \in S$ 、 $-r \in S$ 、 $r = 0$ 恰有一个成立; 并且若 $a \in S, b \in S$, 则 $ab \in S$, $a + b \in S$ 。试确定集合 S 。

练习 1.35 集合 $S = \{1, 2, 3, 4, 5, 6, 7, 8, 9, 0\}$ 的若干个五元子集满足: S 中的任何两个元素至多出现在两个不同的五元子集中, 问: 至多有多少个五元子集?

1.6 D 组

练习 1.36 S_1, S_2, S_3 是三个非空整数集, 已知对于 $1, 2, 3$ 的任意一个排列 i, j, k , 如果 $x \in S_i, y \in S_j$, 则 $x - y \in S_k$ 。求证: S_1, S_2, S_3 中必有两个相等。

练习 1.37 求证: 集合 $\{1, 2, \dots, 1989\}$ 可以划分为 117 个互不相交的子集 A_i , 其中 $i = 1, 2, \dots, 117$, 使得:

1. 每个 A_i 恰有 17 个元素;
2. 每个 A_i 中各元素之和相同。

练习 1.38 某人写了 n 封信, 同时写了 n 个信封, 然后将信任意装入信封, 问: 每封信都装错的情况有多少种?

练习 1.39 设 $a_1, a_2, \dots, a_{20}$ 是 20 个两两不同的整数, 且集合 $\{a_i + a_j \mid 1 \leq i \leq j \leq 20\}$ 中有 201 个不同的元素, 求集合 $\{|a_i - a_j| \mid 1 \leq i < j \leq 20\}$ 中不同元素个数的最小可能值。

练习 1.40 设 S 是由 $2n$ 个人组成的集合。求证: 其中必定有两个人, 他们的公共朋友的个数为偶数。

练习 1.41 对于整数 $n \geq 4$, 求出最小的整数 $f(n)$, 使得对于任何正整数 m , 集合 $\{m, m+1, \dots, m+n-1\}$ 的任一个 $f(n)$ 元子集中, 均有至少 3 个两两互质的元素。

练习 1.42 设集合 $S = \{1, 2, \dots, 50\}$, 求最小自然数 k , 使 S 的任意一个 k 元子集中都存在两个不同的数 a 和 b , 满足 $(a+b) \mid ab$ 。

练习 1.43 集合 $X = \{1, 2, \dots, 6k\}$, $k \in \mathbb{N}_+$, 试作出 X 的三元子集族 $\mathcal{F}$, 满足:

1. X 的任意一个二元子集至少被族 $\mathcal{F}$ 中的一个三元子集包含;
2. $|\mathcal{F}| = 6k^2$ ($|\mathcal{F}|$ 表示 $\mathcal{F}$ 的元素个数)。

练习 1.44 设集合 $A = \{1, 2, \dots, m\}$, 求最小的正整数 m , 使得对 A 的任意一个 14-分划 $A_1, A_2, \dots, A_{14}$, 一定存在某个集合 $A_i (1 \leq i \leq 14)$, 在 A_i 中有两个元素 a 和 b 满足 $b < a \leq \frac{4}{3}b$ 。

第二章 二次函数与命题

2.1 基础知识

定理 2.1: 二次函数的定义 当 $a \neq 0$ 时, $y = ax^2 + bx + c$ 或 $f(x) = ax^2 + bx + c$ 称为关于 x 的二次函数, 其对称轴为直线 $x = -\frac{b}{2a}$, 配方可得 $f(x) = a(x - x_0)^2 + f(x_0)$, 其中 $x_0 = -\frac{b}{2a}$ 。

定理 2.2: 二次函数的单调性 当 $a > 0$ 时, $f(x)$ 的图象开口向上, 在区间 $(-\infty, x_0]$ 上单调递减, 在 $[x_0, +\infty)$ 上单调递增; 当 $a < 0$ 时, 单调性相反。

定理 2.3: 二次函数与方程、不等式的关系 当 $a > 0$ 时, 记方程 $f(x) = 0$ 即 $ax^2 + bx + c = 0$ 的判别式 $\Delta = b^2 - 4ac$, 其与不等式、函数图象的关系如下:

1. 当 $\Delta > 0$ 时, 方程有两个不等实根 x_1, x_2 ($x_1 < x_2$), 不等式 $ax^2 + bx + c > 0$ 的解集为 $\{x \mid x < x_1 \text{ 或 } x > x_2\}$, 不等式 $ax^2 + bx + c < 0$ 的解集为 $\{x \mid x_1 < x < x_2\}$, 函数可表示为 $f(x) = a(x - x_1)(x - x_2)$;
2. 当 $\Delta = 0$ 时, 方程有两个相等实根 $x_1 = x_2 = x_0 = -\frac{b}{2a}$, 不等式 $ax^2 + bx + c > 0$ 的解集为 $\{x \mid x \neq -\frac{b}{2a}\}$, 不等式 $ax^2 + bx + c < 0$ 的解集为空集 $\emptyset$;
3. 当 $\Delta < 0$ 时, 方程无实根, 不等式 $ax^2 + bx + c > 0$ 的解集为 $\mathbb{R}$, 不等式 $ax^2 + bx + c < 0$ 的解集为空集 $\emptyset$ 。

定理 2.4: 二次函数的最值 若 $a > 0$, 当 $x = x_0$ 时, $f(x)$ 取最小值 $f(x_0) = \frac{4ac-b^2}{4a}$; 若 $a < 0$, 当 $x = x_0$ 时, $f(x)$ 取最大值 $f(x_0) = \frac{4ac-b^2}{4a}$ 。

对于给定区间 $[m, n]$ 上的二次函数 $f(x) = ax^2 + bx + c$ ($a > 0$):

- 当 $x_0 \in [m, n]$ 时, $f(x)$ 在 $[m, n]$ 上的最小值为 $f(x_0)$;
- 当 $x_0 < m$ 时, $f(x)$ 在 $[m, n]$ 上的最小值为 $f(m)$;
- 当 $x_0 > n$ 时, $f(x)$ 在 $[m, n]$ 上的最小值为 $f(n)$ 。

定理 2.5: 绝对值不等式 若 $a, b \in \mathbb{R}$, 则 $|a| - |b| \leq |a + b| \leq |a| + |b|$ 。

定理 2.6: 基本不等式 若 $a, b \in \mathbb{R}$, 则 $a^2 + b^2 \geq 2ab$; 若 $x, y \in \mathbb{R}^+$, 则 $x + y \geq 2\sqrt{xy}$ 。

定义 2.1: 命题与复合命题 能判断真假的语句叫命题。不含逻辑联结词“或”、“且”、“非”的命题叫做简单命题，由简单命题与逻辑联结词构成的命题叫复合命题。

注 1 “ p 或 q ”复合命题只有当 p, q 同为假命题时为假，否则为真命题；“ p 且 q ”复合命题只有当 p, q 同时为真命题时为真，否则为假命题； p 与“非 p ”（即 $\neg p$ ）恰好一真一假。

定义 2.2: 四种命题 原命题：若 p 则 q (p 为条件， q 为结论)；逆命题：若 q 则 p ；否命题：若非 p 则非 q ；逆否命题：若非 q 则非 p 。

注 2 原命题与其逆否命题同真假，一个命题的逆命题和否命题同真假。

注 3 反证法的理论依据是矛盾的排中律。

定义 2.3: 充分条件与必要条件 如果命题“若 p 则 q ”为真，则记为 $p \Rightarrow q$ ，否则记作 $p \nRightarrow q$ 。

- 若 $p \Rightarrow q$ ，则 p 是 q 的充分条件；
- 若 $q \Rightarrow p$ ，则 p 是 q 的必要条件；
- 若 $p \Rightarrow q$ 但 $q \nRightarrow p$ ，则 p 是 q 的充分非必要条件；
- 若 $p \nRightarrow q$ 但 $q \Rightarrow p$ ，则 p 是 q 的必要非充分条件；
- 若 $p \Rightarrow q$ 且 $q \Rightarrow p$ ，则 p 是 q 的充要条件。

2.2 方法与例题

2.2.1 待定系数法

例题 2.1 设方程 $x^2 - x + 1 = 0$ 的两根是 α, β , 求满足 $f(\alpha) = \beta$, $f(\beta) = \alpha$, $f(1) = 1$ 的二次函数 $f(x)$ 。

2.2.2 方程的思想

例题 2.2 已知 $f(x) = ax^2 - c$ 满足 $-4 \leq f(1) \leq -1$, $-1 \leq f(2) \leq 5$, 求 $f(3)$ 的取值范围。

2.2.3 利用二次函数的性质

例题 2.3 已知二次函数 $f(x) = ax^2 + bx + c$ ($a, b, c \in \mathbb{R}, a \neq 0$), 若方程 $f(x) = x$ 无实根, 求证: 方程 $f(f(x)) = x$ 也无实根。

2.2.4 利用二次函数表达式解题

例题 2.4 设二次函数 $f(x) = ax^2 + bx + c$ ($a > 0$), 方程 $f(x) = x$ 的两根 x_1, x_2 满足 $0 < x_1 < x_2 < \frac{1}{a}$ 。

1. 当 $x \in (0, x_1)$ 时, 求证: $x < f(x) < x_1$;
2. 设函数 $f(x)$ 的图象关于 $x = x_0$ 对称, 求证: $x_0 < \frac{x_1}{2}$ 。

2.2.5 构造二次函数解题

例题 2.5 已知关于 x 的方程 $(ax + 1)^2 = a^2(1 - x^2)$, $a > 1$, 求证: 方程的正根比 1 小, 负根比 -1 大。

2.2.6 定义在区间上的二次函数的最值

例题 2.6 当 x 取何值时, 函数 $y = \frac{x^4 + x^2 + 5}{(x^2 + 1)^2}$ 取最小值? 求出这个最小值。

例题 2.7 设变量 x 满足 $x^2 + bx \leq -x$ ($b < -1$), 并且 $x^2 + bx$ 的最小值是 $-\frac{1}{2}$, 求 b 的值。

2.2.7 一元二次不等式问题的解法

例题 2.8 已知不等式组 $\begin{cases} x^2 - x + a - a^2 < 0 \\ x + 2a > 1 \end{cases}$ 的整数解恰好有两个, 求 a 的取值范围。

2.2.8 充分性与必要性

例题 2.9 设实数 A, B, C 使得不等式

$$A(x-y)(x-z) + B(y-z)(y-x) + C(z-x)(z-y) \geq 0$$

对一切实数 x, y, z 都成立, 问 A, B, C 应满足怎样的条件? (要求写出充分必要条件, 限定用只涉及 A, B, C 的等式或不等式表示)

2.3 A 组

练习 2.1 下列四个命题中属于真命题的是 _____。

1. “若 $x + y = 0$, 则 x, y 互为相反数” 的逆命题;
2. “两个全等三角形的面积相等” 的否命题;
3. “若 $q \leq 1$, 则 $x^2 + x + q = 0$ 有实根” 的逆否命题;
4. “不等边三角形的三个内角相等” 的逆否命题。

练习 2.2 由下列各组命题构成 “ p 或 q ”、“ p 且 q ”、“非 p ” 形式的复合命题中, p 或 q 为真, p 且 q 为假, 非 p 为真的是 _____。

1. p : 3 是偶数, q : 4 是奇数;
2. p : $3 + 2 = 6$, q : $5 > 3$;
3. p : $a \in (a, b)$, q : $\{a\} \subsetneq \{a, b\}$;
4. p : $\mathbb{Q} \subsetneq \mathbb{R}$, q : $\mathbb{N} = \mathbb{Z}$ 。

练习 2.3 当 $|x-2| < a$ 时, 不等式 $|x^2-4| < 1$ 成立, 则正数 a 的取值范围是 _____。

练习 2.4 不等式

$$ax^2 + (ab+1)x + b > 0$$

的解是 $1 < x < 2$, 则 a, b 的值是 _____。

练习 2.5 $x \neq 1$ 且 $x \neq 2$ 是 $x-1 \neq \sqrt{x-1}$ 的 _____ 条件; 而 $-2 < m < 0$ 且 $0 < n < 1$ 是关于 x 的方程 $x^2 + mx + n = 0$ 有两个小于 1 的正根的 _____ 条件。

练习 2.6 命题 “垂直于同一条直线的两条直线互相平行” 的逆命题是 _____。

练习 2.7 若 $S = \{x \mid mx^2 + 5x + 2 = 0\}$ 的子集至多有 2 个, 则 m 的取值范围是 _____。

练习 2.8 $\mathbb{R}$ 为全集, $A = \{x \mid 3-x \geq 4\}$, $B = \left\{x \mid \frac{5}{x+2} \geq 1\right\}$, 则 $(\complement_{\mathbb{R}} A) \cap B =$ _____。

练习 2.9 设 a, b 是整数, 集合 $A = \{(x, y) \mid (x-a)^2 + 3b \leq 6y\}$, 点 $(2, 1) \in A$, 但点 $(1, 0) \notin A$, $(3, 2) \notin A$, 则 a, b 的值是 _____。

练习 2.10 设集合 $A = \{x \mid |x| < 4\}$, $B = \{x \mid x^2 - 4x + 3 > 0\}$, 则集合 $\{x \mid x \in A \text{ 且 } x \notin A \cap B\} =$ _____。

练习 2.11 求使不等式 $ax^2 + 4x - 1 \geq -2x^2 - a$ 对任意实数 x 恒成立的 a 的取值范围。

练习 2.12 对任意 $x \in [0, 1]$, 有 $\begin{cases} x^2 - 2kx + k - 4 < 0 \\ x^2 - kx - k + 3 > 0 \end{cases}$ 成立, 求 k 的取值范围。

2.4 B 组

练习 2.13 若不等式 $|x - a| < x$ 的解集不空, 则实数 a 的取值范围是 _____。

练习 2.14 使不等式 $x^2 + (a - 6)x + 9 > 0$ 当 $|a| \leq 1$ 时恒成立的 x 的取值范围是 _____。

练习 2.15 若不等式

$$-x^2 + kx - 4 < 0$$

的解集为 $\mathbb{R}$, 则实数 k 的取值范围是 _____。

练习 2.16 若集合 $A = \{x \mid |x + 7| > 10\}$, $B = \{x \mid |x - 5| < k\}$, 且 $A \cap B = B$, 则 k 的取值范围是 _____。

练习 2.17 设 $a_1, a_2, b_1, b_2, c_1, c_2$ 均为非零实数, 不等式 $a_1x^2 + b_1x + c_1 > 0$ 和 $a_2x^2 + b_2x + c_2 > 0$ 解集分别为 M 和 N , 那么 “ $\frac{a_1}{a_2} = \frac{b_1}{b_2} = \frac{c_1}{c_2}$ ” 是 “ $M = N$ ” 的 _____ 条件。

练习 2.18 若下列三个方程 $x^2 + 4ax - 4a + 3 = 0$, $x^2 + (a - 1)x + a^2 = 0$, $x^2 + 2ax - 2a = 0$ 中至少有一个方程有实根, 则实数 a 的取值范围是 _____。

练习 2.19 已知 p, q 都是 r 的必要条件, s 是 r 的充分条件, q 是 s 的充分条件, 则 r 是 q 的 _____ 条件。

练习 2.20 已知 $p: \left|1 - \frac{x-1}{3}\right| \leq 2$, $q: x^2 - 2x + 1 - m^2 \leq 0$ ($m > 0$), 若非 p 是非 q 的必要不充分条件, 则实数 m 的取值范围是 _____。

练习 2.21 已知 $a > 0$, $f(x) = ax^2 + bx + c$, 对任意 $x \in \mathbb{R}$ 有 $f(x+2) = f(2-x)$, 若 $f(1-2x^2) < f(1+2x-x^2)$, 求 x 的取值范围。

练习 2.22 已知二次函数 $f(x) = ax^2 + bx + c$ 的图象经过点 $(1, 1)$, $(3, 5)$, $f(0) > 0$, 当函数的最小值取最大值时, $a + b^2 + c^3 =$ _____。

练习 2.23 若关于 x 的方程 $4x^2 - 4x + m = 0$ 在 $[-1, 1]$ 上至少有一个实根, 则 m 取值范围是 _____。

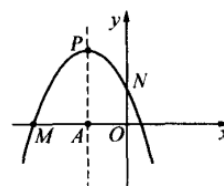
练习 2.24 若 $f(x) = x^4 + px^3 + qx^2 + x$ 对一切 $x \in \mathbb{R}$ 都有 $f(x) \geq x$ 且 $f(1) = 1$, 则 $p + q^2 =$ _____。

2.5 C 组

练习 2.25 不等式 $|x|^3 - 2x^2 - 4|x| + 3 < 0$ 的解集是 _____。

练习 2.26 如果实数 x, y 满足 $\begin{cases} x + 2y > 0 \\ x - 2y > 0 \\ x^2 - 4y^2 = 4 \end{cases}$ ，那么 $|x| - |y|$ 的最小值是 _____。

练习 2.27 函数 $f(x) = ax^2 + bx + c$ 的图象如图，且 $\sqrt{b^2 - 4ac} = b - 2ac$ ，那么 $b^2 - 4ac$ _____ 4 (填 $>, =, <$)。



练习 2.28 对一切 $x \in \mathbb{R}$, $f(x) = ax^2 + bx + c$ ($a < b$) 的值恒为非负实数, 则 $\frac{a+b+c}{b-a}$ 的最小值为 _____。

练习 2.29 若 $a < b < c < d$, 求证: 对任意实数 $t \neq -1$, 关于 x 的方程 $(x-a)(x-c) + t(x-b)(x-d) = 0$ 都有两个不等的实根。

练习 2.30 已知 $f(x) = ax^2 + bx + c$ 在 $[0, 1]$ 上满足 $|f(x)| \leq 1$, 试求 $|a| + |b| + |c|$ 的最大值。

练习 2.31 已知 $a, b, c \in \mathbb{R}$, $f(x) = ax^2 + bx + c$, $g(x) = ax + b$, 当 $|x| \leq 1$ 时, $|f(x)| \leq 1$ 。

1. 求证: $|c| \leq 1$;
2. 求证: 当 $|x| \leq 1$ 时, $|g(x)| \leq 2$;
3. 当 $a > 0$ 且 $|x| \leq 1$ 时, $g(x)$ 最大值为 2, 求 $f(x)$ 。

练习 2.32 设实数 a, b, c, m 满足条件: $\frac{a}{m+2} + \frac{b}{m+1} + \frac{c}{m} = 0$ 且 $a \geq 0, m > 0$, 求证: 方程 $ax^2 + bx + c = 0$ 有一根 x_0 满足 $0 < x_0 < 1$ 。

练习 2.33 设 $f(x) = ax^2 + bx + c$, $a, b, c \in \mathbb{R}$, $a > 100$, 试问满足 $|f(x)| \leq 50$ 的整数 x 最多有几个?

练习 2.34 设函数 $f(x) = ax^2 + 8x + 3$ ($a < 0$), 对于给定的负数 a , 有一个最大的正数 $l(a)$, 使得在整个区间 $[0, l(a)]$ 上, 不等式 $|f(x)| \leq 5$ 都成立。求 $l(a)$ 的最大值及相应 a 的值。

练习 2.35 设 $x_1, x_2, \dots, x_n \in [a, a+1]$, 且设 $x = \frac{1}{n} \sum_{i=1}^n x_i$, $y = \frac{1}{n} \sum_{j=1}^n x_j^2$, 求 $f = y - x^2$ 的最大值。

练习 2.36 设 $F(x) = ax^2 + bx + c$, $a, b, c \in \mathbb{R}$, 且 $|F(0)| \leq 1$, $|F(1)| \leq 1$, $|F(-1)| \leq 1$, 则对于 $|x| \leq 1$, 求 $|F(x)|$ 的最大值。

练习 2.37 已知 $f(x) = x^2 + ax + b$, 若存在实数 m , 使得 $|f(m)| \leq \frac{1}{4}$, $|f(m+1)| \leq \frac{1}{4}$, 求 $\Delta = a^2 - 4b$ 的最大值和最小值。

练习 2.38 设二次函数 $f(x) = ax^2 + bx + c$ ($a, b, c \in \mathbb{R}, a \neq 0$) 满足下列条件:

1. 当 $x \in \mathbb{R}$ 时, $f(x-4) = f(2-x)$, 且 $f(x) \geq x$;
2. 当 $x \in (0, 2)$ 时, $f(x) \leq \left(\frac{x+1}{2}\right)^2$;
3. $f(x)$ 在 $\mathbb{R}$ 上最小值为 0。

求最大的 $m(m > 1)$, 使得存在 $t \in \mathbb{R}$, 只要 $x \in [1, m]$ 就有 $f(x+t) \leq x$ 。

练习 2.39 求证: 方程 $3ax^2 + 2bx - (a+b) = 0$ ($b \neq 0$) 在 $(0, 1)$ 内至少有一个实根。

第三章 函数

3.1 基础知识

定义 3.1: 映射 对于任意两个集合 A, B , 依对应法则 f , 若对 A 中的任意一个元素 x , 在 B 中都有唯一一个元素与之对应, 则称 $f: A \rightarrow B$ 为一个映射。

定义 3.2: 单射、满射、一一映射与逆映射 设 $f: A \rightarrow B$ 是一个映射。

1. 若对任意 $x, y \in A$, 只要 $x \neq y$, 就有 $f(x) \neq f(y)$, 则称 f 为单射。
2. 若对任意 $y \in B$, 都存在 $x \in A$, 使得 $f(x) = y$, 则称 f 为 A 到 B 上的满射。
3. 若 f 既是单射又是满射, 则称 f 为一一映射。
4. 一一映射存在逆映射, 即从 B 到 A 由相反的对对应法则 f^{-1} 构成的映射, 记作 $f^{-1}: B \rightarrow A$ 。

定义 3.3: 函数 映射 $f: A \rightarrow B$ 中, 若 A, B 都是非空数集, 则这个映射为函数。 A 称为它的定义域, 若 $x \in A, y \in B$ 且 $f(x) = y$ (即 x 对应 B 中的 y), 则 y 叫做 x 的象, x 叫 y 的原象。集合 $\{f(x) \mid x \in A\}$ 叫函数的值域。

通常函数由解析式给出, 此时函数定义域就是使解析式有意义的未知数的取值范围, 如函数 $y = 3\sqrt{x-1}$ 的定义域为 $\{x \mid x \geq 0, x \in \mathbb{R}\}$ 。

定义 3.4: 函数的性质

1. **单调性**: 设函数 $f(x)$ 在区间 I 上满足对任意的 $x_1, x_2 \in I$ 并且 $x_1 < x_2$, 总有 $f(x_1) < f(x_2)$ ($f(x_1) > f(x_2)$), 则称 $f(x)$ 在区间 I 上是增 (减) 函数, 区间 I 称为单调增 (减) 区间。
2. **奇偶性**: 设函数 $y = f(x)$ 的定义域为 D 且 D 是关于原点对称的数集, 若对于任意的 $x \in D$, 都有 $f(-x) = -f(x)$, 则称 $f(x)$ 是奇函数; 若对任意的 $x \in D$, 都有 $f(-x) = f(x)$, 则称 $f(x)$ 是偶函数。奇函数的图象关于原点对称, 偶函数的图象关于 y 轴对称。
3. **周期性**: 对于函数 $f(x)$, 如果存在一个不为零的常数 T , 使得当 x 取定义域内每一个数时, $f(x+T) = f(x)$ 总成立, 则称 $f(x)$ 为周期函数, T 称为这个函数的周期; 如果周期中存在最小的正数 T_0 , 则这个正数叫做函数 $f(x)$ 的最小正周期。

定理 3.1: 复合函数的单调性 复合函数 $y = f[g(x)]$ 的单调性遵循“同增异减”原则: 内外函数单调性相同, 复合函数为增函数; 内外函数单调性相反, 复合函数为减函数。

定义 3.5: 反函数 若函数 $f: A \rightarrow B$ (通常记作 $y = f(x)$) 是一一映射, 则它的逆映射 $f^{-1}: B \rightarrow A$ 叫原函数的反函数, 通常写作 $y = f^{-1}(x)$ 。

求反函数的过程: 在解析式 $y = f(x)$ 中反解 x 得 $x = f^{-1}(y)$, 然后将 x, y 互换得 $y = f^{-1}(x)$, 最后指出反函数的定义域即原函数的值域。例如, 函数 $y = \frac{1}{1-x}$ 的反函数是 $y = 1 - \frac{1}{x} (x \neq 0)$ 。

定理 3.2: 反函数的图象对称性 互为反函数的两个函数的图象关于直线 $y = x$ 对称。

定理 3.3: 反函数的单调性 在定义域上为增 (减) 函数的函数, 其反函数必为增 (减) 函数。

3.2 方法与例题

3.2.1 数形结合法

例题 3.1 求方程 $|x-1| = \frac{1}{x}$ 的正根的个数。

例题 3.2 求函数 $f(x) = \sqrt{x^4 - 3x^2 - 6x + 13} - \sqrt{x^4 - x^2 + 1}$ 的最大值。

3.2.2 函数性质的应用

例题 3.3 设 $x, y \in \mathbb{R}$ 且满足
$$\begin{cases} (x-1)^3 + 1997(x-1) = -1 \\ (y-1)^3 + 1997(y-1) = 1 \end{cases}$$
, 求 $x+y$ 的值。

例题 3.4 奇函数 $f(x)$ 在定义域 $(-1, 1)$ 内是减函数, 又 $f(1-a) + f(1-a^2) < 0$, 求 a 的取值范围。

例题 3.5 设 $f(x)$ 是定义在 $(-\infty, +\infty)$ 上以 2 为周期的函数, 对 $k \in \mathbb{Z}$, 用 I_k 表示区间 $(2k-1, 2k+1]$, 已知当 $x \in I_0$ 时, $f(x) = x^2$, 求 $f(x)$ 在 I_k 上的解析式。

例题 3.6 解方程: $(3x-1)(\sqrt{9x^2-6x+5}+1) + (2x-3)(\sqrt{4x^2-12x+13}+1) = 0$ 。

3.2.3 配方法

例题 3.7 求函数 $y = x + \sqrt{2x+1}$ 的值域。

3.2.4 换元法

例题 3.8 求函数 $y = (\sqrt{1+x} + \sqrt{1-x} + 2)(\sqrt{1-x^2} + 1)$, $x \in [0, 1]$ 的值域。

3.2.5 判别式法

例题 3.9 求函数 $y = \frac{x^2-3x+4}{x^2+3x+4}$ 的值域。

3.2.6 关于反函数

例题 3.10 若函数 $y = f(x)$ 定义域、值域均为 $\mathbb{R}$ ，且存在反函数。若 $f(x)$ 在 $(-\infty, +\infty)$ 上递增，求证： $y = f^{-1}(x)$ 在 $(-\infty, +\infty)$ 上也是增函数。

例题 3.11 设函数 $f(x) = \sqrt[4]{\frac{4x+1}{3x+2}}$ ，解方程： $f(x) = f^{-1}(x)$ 。

3.3 A 组

练习 3.1 已知 $X = \{-1, 0, 1\}$, $Y = \{-2, -1, 0, 1, 2\}$, 映射 $f: X \rightarrow Y$ 满足: 对任意的 $x \in X$, 它在 Y 中的象 $f(x)$ 使得 $x + f(x)$ 为偶数, 这样的映射有 _____ 个。

练习 3.2 给定 $A = \{1, 2, 3\}$, $B = \{-1, 0, 1\}$ 和映射 $f: A \rightarrow B$, 若 f 为单射, 则 f 有 _____ 个; 若 f 为满射, 则 f 有 _____ 个; 满足 $f[f(x)] = f(x)$ 的映射有 _____ 个。

练习 3.3 若直线 $y = k(x - 2)$ 与函数 $y = x^2 + 2x$ 图象相交于点 $(-1, -1)$, 则图象与直线一共有 _____ 个交点。

练习 3.4 函数 $y = f(x)$ 的值域为 $[\frac{3}{8}, \frac{4}{9}]$, 则函数 $g(x) = f(x) + \sqrt{1 - 2f(x)}$ 的值域为 _____。

练习 3.5 已知 $f(x) = \frac{1}{x+1}$, 则函数 $g(x) = f[f(x)]$ 的值域为 _____。

练习 3.6 已知 $f(x) = |x+a|$, 当 $x \geq 3$ 时 $f(x)$ 为增函数, 则 a 的取值范围是 _____。

练习 3.7 设 $y = f(x)$ 在定义域 $(\frac{1}{2}, 2)$ 内是增函数, 则 $y = f(x^2-1)$ 的单调递减区间为 _____。

练习 3.8 若函数 $y = \varphi(x)$ 存在反函数 $y = \varphi^{-1}(x)$, 则 $y = \varphi^{-1}(x)$ 的图象与 $y = -\varphi(-x)$ 的图象关于直线 _____ 对称。

练习 3.9 函数 $f(x)$ 满足 $f\left(\frac{x-1}{x}\right) = 1 - \frac{1}{x} + \frac{1}{x^2}$, 则 $f\left(\frac{1}{x}\right) =$ _____。

练习 3.10 求下列函数的值域:

1. $y = \sqrt{x-2} - \sqrt{x-1}$;
2. $y = \sqrt{x} + \frac{1}{\sqrt{x}} - \sqrt{x + \frac{1}{x} + 1}$;
3. $y = x + 2\sqrt{x+1}$;
4. $y = \frac{x-1}{x^2+2}$ 。

练习 3.11 已知 $y = f(x)$ 定义在 $\mathbb{R}$ 上, 对任意 $x \in \mathbb{R}$, $f(x) = f(x+2)$, 且 $f(x)$ 是偶函数, 又当 $x \in [2, 3]$ 时, $f(x) = x$, 则当 $x \in [-2, 0]$ 时, 求 $f(x)$ 的解析式。

3.4 B 组

练习 3.12 已知 $a \in (-\frac{1}{2}, 0]$, $f(x)$ 定义域是 $(0, 1]$, 则 $g(x) = f(x+a) + f(x-a) + f(x)$ 的定义域为 _____。

练习 3.13 设 $0 \leq a < 1$ 时, $f(x) = (a-1)x^2 - 6ax + a+1$ 恒为正值, 则 $f(x)$ 定义域为 _____。

练习 3.14 映射 $f : \{a, b, c, d\} \rightarrow \{1, 2, 3\}$ 满足 $10 < f(a) \cdot f(b) \cdot f(c) \cdot f(d) < 20$, 这样的映射 f 有 _____ 个。

练习 3.15 判断下列函数是否为奇函数:

1. $f(x) = (x-1)\sqrt{\frac{1+x}{1-x}}$;
2. $g(x) = |2x+1| - |2x-1|$;
3. $\varphi(x) = \sqrt{x^2-1} + \sqrt{1-x^2}$;
4. $y = \sqrt{x+1} - \sqrt{x-1}$.

练习 3.16 设函数 $y = f(x)$ ($x \in \mathbb{R}$ 且 $x \neq 0$), 对任意非零实数 x_1, x_2 满足 $f(x_1x_2) = f(x_1) + f(x_2)$, 又 $f(x)$ 在 $(0, +\infty)$ 是增函数, 则不等式 $f(x) + f(x - \frac{1}{2}) \leq 0$ 的解集为 _____。

练习 3.17 函数 $f(x) = \begin{cases} x & x \in P \\ -x & x \in M \end{cases}$, 其中 P, M 为 $\mathbb{R}$ 的两个非空子集, 又规定 $f(P) = \{y \mid y = f(x), x \in P\}$, $f(M) = \{y \mid y = f(x), x \in M\}$, 给出如下判断:

1. 若 $P \cap M = \emptyset$, 则 $f(P) \cap f(M) = \emptyset$;
2. 若 $P \cap M \neq \emptyset$, 则 $f(P) \cap f(M) \neq \emptyset$;
3. 若 $P \cup M = \mathbb{R}$, 则 $f(P) \cup f(M) = \mathbb{R}$;
4. 若 $P \cup M \neq \mathbb{R}$, 则 $f(P) \cup f(M) \neq \mathbb{R}$ 。

其中正确的判断是 _____。

练习 3.18 已知 $y = f(x)$ 是定义域为 $[-6, 6]$ 的奇函数，且当 $x \in [0, 3]$ 时是一次函数，当 $x \in [3, 6]$ 时是二次函数，又 $f(6) = 2$ ，当 $x \in [3, 6]$ 时， $f(x) \leq f(5) = 3$ ，求 $f(x)$ 的解析式。

练习 3.19 设 $a > 0$, 函数 $f(x)$ 定义域为 $\mathbb{R}$, 且 $f(x+a) = \frac{1}{2} + \sqrt{f(x) - [f(x)]^2}$, 求证: $f(x)$ 为周期函数。

练习 3.20 奇函数 $f(x)$ 存在反函数 $f^{-1}(x)$, 若把 $y = f(x)$ 的图象向上平移 3 个单位, 然后向右平移 2 个单位后, 再关于直线 $y = -x$ 对称, 得到的曲线所对应的函数是_____。

练习 3.21 若 $a > 0, a \neq 1, F(x)$ 是奇函数, 则 $G(x) = F(x) \left(\frac{1}{a^x - 1} + \frac{1}{2} \right)$ 的奇偶性是_____。

练习 3.22 若 $F\left(\frac{1-x}{1+x}\right) = x$, 则下列等式中正确的有_____。

1. $F(-2-x) = -2 - F(x)$;
2. $F(-x) = F\left(\frac{1-x}{1+x}\right)$;
3. $F(x^{-1}) = F(x)$;
4. $F(F(x)) = -x$ 。

练习 3.23 函数 $f(x) = \frac{1}{\sqrt{x^2 - 2x - 3}}$ 的单调递增区间是_____。

练习 3.24 函数 $f(x) = \frac{x}{1-2^x} - \frac{x}{2}$ 的奇偶性是: _____ (填奇函数、偶函数、非奇非偶)。

3.5 C 组

练习 3.25 函数 $y = \sqrt{x+1} - \sqrt{x-1}$, $x \in (1, +\infty)$ 的反函数是 _____。

练习 3.26 设函数 $y = f(x) (x \in \mathbb{R})$ 的值域为 $\mathbb{R}$, 且为增函数, 若方程 $f(x) = x$ 解集为 P , $f[f(x)] = x$ 解集为 Q , 则 P 与 Q 的关系为: P _____ Q (填 $=, \subset, \supset$)。

练习 3.27 函数 $y = f(x+1)$ 的反函数是 $y = f^{-1}(x+1)$, 并且 $f(1) = 3997$, 则 $f(1998) =$ _____。

练习 3.28 设关于 x 的方程 $2x^2 - tx - 2 = 0$ 的两根为 $\alpha, \beta (\alpha < \beta)$, 已知函数 $f(x) = \frac{4x-t}{x^2+1}$ 。

1. 求 $f(\alpha)$ 、 $f(\beta)$;
2. 求证: $f(x)$ 在 $[\alpha, \beta]$ 上是增函数;
3. 对任意正数 x_1, x_2 , 求证: $\left| f\left(\frac{x_1\alpha+x_2\beta}{x_1+x_2}\right) - f\left(\frac{x_1\beta+x_2\alpha}{x_1+x_2}\right) \right| < 2|\alpha - \beta|$ 。

练习 3.29 设函数 $f: \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}$ 满足 $f(0) = 1$, 且对任意 $x, y \in \mathbb{R}$, 都有 $f(xy+1) = f(x)f(y) - f(y) - x + 2$, 则 $f(x) =$ _____。

练习 3.30 已知 $f(x)$ 是定义在 $\mathbb{R}$ 上的函数, $f(1) = 1$, 且对任意 $x \in \mathbb{R}$ 都有 $f(x+5) \geq f(x) + 5$, $f(x+1) \leq f(x) + 1$, 若 $g(x) = f(x) + 1 - x$, 则 $g(2002) =$ _____。

练习 3.31 解方程组:
$$\begin{cases} 1 - x^2 = y \\ 1 - y^2 = z \\ 1 - z^2 = x \end{cases} .$$

练习 3.32 设 $k \in \mathbb{N}_+$, $f: \mathbb{N}_+ \rightarrow \mathbb{N}_+$ 满足: (1) $f(x)$ 严格递增; (2) 对任意 $n \in \mathbb{N}_+$, 有 $f[f(n)] = kn$ 。求证: 对任意 $n \in \mathbb{N}_+$, 都有 $\frac{2k}{k+1}n \leq f(n) \leq \frac{k+1}{2}n$ 。

练习 3.33 求证：恰有一个定义在所有非零实数上的函数 f ，满足：

1. 对任意 $x \neq 0$, $f(x) = x \cdot f\left(\frac{1}{x}\right)$;
2. 对所有的 $x \neq -y$ 且 $xy \neq 0$, 有 $f(x) + f(y) = 1 + f(x + y)$ 。

练习 3.34 设 $f(x)$ 对一切 $x > 0$ 有定义，且满足：

1. $f(x)$ 在 $(0, +\infty)$ 是增函数；
2. 任意 $x > 0$, $f(x)f\left(f(x) + \frac{1}{x}\right) = 1$ 。

试求 $f(1)$ 的值。

练习 3.35 $f : [0, 1] \rightarrow \mathbb{R}$ 满足:

1. 任意 $x \in [0, 1]$, $f(x) \geq 0$;
2. $f(1) = 1$;
3. 当 $x, y, x + y \in [0, 1]$ 时, $f(x) + f(y) \leq f(x + y)$ 。

试求最小常数 c , 对满足上述条件的函数 $f(x)$ 都有 $f(x) \leq cx$ 。

练习 3.36 试求 $f(x, y) = 6(x^2 + y^2)(x + y) - 4(x^2 + xy + y^2) - 3(x + y) + 5$ ($x > 0, y > 0$) 的最小值。

练习 3.37 对给定的正数 $p, q \in (0, 1)$, 有 $p + q > 1 \geq p^2 + q^2$, 试求 $f(x) = (1 - x)\sqrt{p^2 - x^2} + x\sqrt{q^2 - (1 - x)^2}$ 在 $[1 - q, p]$ 上的最大值。

练习 3.38 已知 $f: (0, 1) \rightarrow \mathbb{R}$ 且

$$f(x) = \begin{cases} x & x \notin \mathbb{Q} \\ \frac{p+1}{q} & x = \frac{p}{q}, (p, q) = 1, 0 < p < q \end{cases}.$$

当 $x \in \left(\frac{7}{8}, \frac{8}{9}\right)$ 时, 试求 $f(x)$ 的最大值。

3.6 D 组

练习 3.39 函数 $f(x)$ 定义在正整数集上, 且满足 $f(n) = \begin{cases} n-3 & (n \geq 1000) \\ f[f(n+5)] & (n < 1000) \end{cases}$, 求 $f(100)$ 的值。

练习 3.40 函数 $y = f(x)$ 定义在整个实轴上, 它的图象在围绕坐标原点旋转角 $\frac{\pi}{2}$ 后不变。

1. 求证: 方程 $f(x) = x$ 恰有一个解;
2. 试给出一个具有上述性质的函数。

练习 3.41 设 $\mathbb{Q}^+$ 是正有理数的集合, 试构造一个函数 $f: \mathbb{Q}^+ \rightarrow \mathbb{Q}^+$, 满足条件: $f(xf(y)) = \frac{f(x)}{y}$, $\forall x, y \in \mathbb{Q}^+$ 。

第四章 常见初等函数

4.1 基础知识

定义 4.1: 指数函数 形如 $y = a^x (a > 0, a \neq 1)$ 的函数叫做指数函数，其定义域为 $\mathbb{R}$ ，值域为 $(0, +\infty)$ 。当 $0 < a < 1$ 时， $y = a^x$ 是减函数；当 $a > 1$ 时， $y = a^x$ 为增函数，它的图象恒过定点 $(0, 1)$ 。

定义 4.2: 分数指数幂 分数指数幂的运算定义如下：

$$a^{\frac{1}{n}} = \sqrt[n]{a}, \quad a^{\frac{m}{n}} = \sqrt[n]{a^m}, \\ a^{-n} = \frac{1}{a^n}, \quad a^{-\frac{m}{n}} = \frac{1}{\sqrt[n]{a^m}}.$$

定义 4.3: 对数函数 形如 $y = \log_a x (a > 0, a \neq 1)$ 的函数叫做对数函数，其定义域为 $(0, +\infty)$ ，值域为 $\mathbb{R}$ ，图象过定点 $(1, 0)$ 。当 $0 < a < 1$ 时， $y = \log_a x$ 为减函数；当 $a > 1$ 时， $y = \log_a x$ 为增函数。

定理 4.1: 对数的运算性质 设 $M > 0, N > 0, a > 0, a \neq 1, c > 0, c \neq 1$, 则对数满足以下运算性质:

1. $a^x = M \Leftrightarrow x = \log_a M$;
2. $\log_a(MN) = \log_a M + \log_a N$;
3. $\log_a\left(\frac{M}{N}\right) = \log_a M - \log_a N$;
4. $\log_a M^n = n \log_a M$;
5. $\log_a \sqrt[n]{M} = \frac{1}{n} \log_a M$;
6. $a^{\log_a M} = M$;
7. 换底公式: $\log_a b = \frac{\log_c b}{\log_c a}$ 。

定理 4.2: 对勾函数的单调性 函数 $y = x + \frac{a}{x} (a > 0)$ 的单调递增区间是 $(-\infty, -\sqrt{a}]$ 和 $[\sqrt{a}, +\infty)$, 单调递减区间为 $[-\sqrt{a}, 0)$ 和 $(0, \sqrt{a}]$ 。

定理 4.3: 连续函数的零点存在定理 若 $a < b$, $f(x)$ 在 $[a, b]$ 上连续, 且 $f(a) \cdot f(b) < 0$, 则 $f(x) = 0$ 在 (a, b) 上至少有一个实根。

4.2 方法与例题

4.2.1 构造函数解题

例题 4.1 已知 $a, b, c \in (-1, 1)$, 求证: $ab + bc + ca + 1 > 0$ 。

例题 4.2 (柯西不等式) 若 $a_1, a_2, \dots, a_n$ 是不全为 0 的实数, $b_1, b_2, \dots, b_n \in \mathbb{R}$, 则

$$\left(\sum_{i=1}^n a_i^2\right) \cdot \left(\sum_{i=1}^n b_i^2\right) \geq \left(\sum_{i=1}^n a_i b_i\right)^2$$

等号当且仅当存在 $\mu \in \mathbb{R}$ 使 $a_i = \mu b_i$ ($i = 1, 2, \dots, n$) 时成立。

例题 4.3 设 $x, y \in \mathbb{R}^+$, $x + y = c$, c 为常数且 $c \in (0, 2]$, 求 $u = \left(x + \frac{1}{x}\right) \left(y + \frac{1}{y}\right)$ 的最小值。

4.2.2 指数和对数的运算技巧

例题 4.4 设 $p, q \in \mathbb{R}^+$ 且满足 $\log_9 p = \log_{12} q = \log_{16}(p+q)$, 求 $\frac{q}{p}$ 的值。

例题 4.5 对于正整数 a, b, c ($a \leq b \leq c$) 和实数 x, y, z, w , 若 $a^x = b^y = c^z = 70^w$, 且 $\frac{1}{x} + \frac{1}{y} + \frac{1}{z} = \frac{1}{w}$, 求证: $a + b = c$ 。

例题 4.6 已知 $x \neq 1, a \neq 1, c \neq 1$, 且 $\log_a x + \log_c x = 2 \log_b x$, 求证: $c^2 = (ac)^{\log_a b}$ 。

4.2.3 指数与对数方程的解法

例题 4.7 解方程: $3^x + 4^x + 5^x = 6^x$ 。

例题 4.8 解方程组:
$$\begin{cases} x^{x+y} = y^{12} \\ y^{x+y} = x^3 \end{cases} \quad (\text{其中 } x, y \in \mathbb{R}^+).$$

4.3 A 组

练习 4.1 命题 $p : "(\log_2 3)^x - (\log_5 3)^x \geq (\log_2 3)^{-y} - (\log_5 3)^{-y}"$ 是命题 $q : "x + y \geq 0"$ 的 _____ 条件。

练习 4.2 如果 x_1 是方程 $x + \lg x = 27$ 的根, x_2 是方程 $x + 10^x = 27$ 的根, 则 $x_1 + x_2 =$ _____。

练习 4.3 已知 $f(x)$ 是定义在 $\mathbb{R}$ 上的增函数, 点 $A(-1, 1)$, $B(1, 3)$ 在它的图象上, $y = f^{-1}(x)$ 是它的反函数, 则不等式 $|f^{-1}(\log_2 x)| < 1$ 的解集为 _____。

练习 4.4 若 $\log_{2a} \frac{1+a^2}{1+a} < 0$, 则 a 的取值范围是 _____。

练习 4.5 命题 p : 函数 $y = \log_2(x + \frac{a}{x} - 3)$ 在 $[2, +\infty)$ 上是增函数; 命题 q : 函数 $y = \log_2(ax^2 - 4x + 1)$ 的值域为 $\mathbb{R}$, 则 p 是 q 的 _____ 条件。

练习 4.6 若 $0 < b < 1$, $a > 0$ 且 $a \neq 1$, 比较大小: $|\log_a(1-b)|$ _____ $|\log_a(1+b)|$ (填 $>$ 、 $<$ 、 $=$)。

练习 4.7 已知 $f(x) = 2 + \log_3 x, x \in [1, 3]$, 则函数 $y = [f(x)]^2 + f(x^2)$ 的值域为 _____。

练习 4.8 若 $x = \frac{1}{\log_{\frac{1}{2}} \frac{1}{3}} + \frac{1}{\log_{\frac{1}{5}} \frac{1}{3}}$, 则与 x 最接近的整数是 _____。

练习 4.9 函数 $y = \log_{\frac{1}{2}} \left(\frac{1}{1-x} + \frac{1}{1+x} \right)$ 的单调递增区间是 _____。

练习 4.10 函数 $f(x) = \frac{x-1}{x^2-2x+5}$ ($x \in [\frac{3}{2}, 2]$) 的值域为 _____。

练习 4.11 当 a 为何值时, 方程 $\frac{\lg 2x}{\lg(x+a)} = 2$ 有一解、二解、无解?

4.4 B 组

练习 4.12 函数 $f(x) = \sqrt{\frac{8}{|x|} - 1} + \lg(x^2 - 1)$ 的定义域是_____。

练习 4.13 已知不等式 $x^2 - \log_m x < 0$ 在 $x \in (0, \frac{1}{2})$ 时恒成立, 则 m 的取值范围是_____。

练习 4.14 若 $x \in \{x \mid \log_2 x = 2^{-x}\}$, 则 x^2 、 x 、 1 从大到小排列是_____。

练习 4.15 若 $f(x) = \ln \frac{1-x}{1+x}$, 则使 $f(a) + f(b) = f\left(\frac{a+b}{1+ab}\right)$ 成立的 a, b 的取值范围是_____。

练习 4.16 已知 $x > 10$, $y > 10$, $xy = 1000$, 则 $(\lg x) \cdot (\lg y)$ 的取值范围是 _____。

练习 4.17 若方程 $\lg(kx) = 2\lg(x+1)$ 只有一个实数解, 则实数 k 的取值范围是 _____。

练习 4.18 已知 $f(x) = \left(\frac{1}{2^x-1} + \frac{1}{2}\right)x$, $F(x) = f(x+t) - f(x-t) (t \neq 0)$, 则 $F(x)$ 是 _____ 函数 (填奇偶性)。

练习 4.19 已知 $f(x) = \lg\left(\frac{1+x}{1-x}\right)$, 若 $f\left(\frac{a+b}{1+ab}\right) = 1$, $f\left(\frac{a-b}{1-ab}\right) = 2$, 其中 $|a| < 1$, $|b| < 1$, 则 $f(a) + f(b) =$ _____。

练习 4.20 设 $a \in \mathbb{R}$, 试讨论关于 x 的方程 $\lg(x-1) + \lg(3-x) = \lg(a-x)$ 的实数解的个数。

4.5 C 组

练习 4.21 函数 $f(x) = \begin{cases} |\lg|x-1|| & x \neq 1 \\ 0 & x = 1 \end{cases}$ 的定义域为 $\mathbb{R}$, 若关于 x 的方程 $f^2(x) + bf(x) + c = 0$ 有 7 个不同的实数解, 则 b, c 应满足的充要条件是 _____。

练习 4.22 设 $f(x) = \lg[1 + 2^x + 3^x + \cdots + (n-1)^x + n^x \cdot a]$, 其中 n 为给定正整数, $n \geq 2$, $a \in \mathbb{R}$ 。若 $f(x)$ 在 $x \in (-\infty, 1]$ 时有意义, 求 a 的取值范围。

练习 4.23 已知 $a_n = \log_n(n+1)$, 设 $\sum_{n=2}^{1023} \frac{1}{\log_{a_n} 100} = \frac{q}{p}$, 其中 p, q 为整数, 且 $(p, q) = 1$, 则 $p \cdot q$ 的值为 _____。

练习 4.24 设 $f(x) = |\lg x|$, 实数 a, b 满足 $0 < a < b$, $f(a) = f(b) = 2f\left(\frac{a+b}{2}\right)$ 。求证: (1) $a^4 + 2a^2 - 4a + 1 = 0$, $b^4 - 4b^3 + 2b^2 + 1 = 0$; (2) $3 < b < 4$ 。

练习 4.25 设 $a > 0$ 且 $a \neq 1$, $f(x) = \log_a(x + \sqrt{x^2 - 1})$ ($x \geq 1$)。 (1) 求 $f(x)$ 的反函数 $f^{-1}(x)$; (2) 若 $f^{-1}(n) < \frac{3^n + 3^{-n}}{2}$ ($n \in \mathbb{N}_+$), 求 a 的取值范围。

练习 4.26 如果 $\log_2 \left[\log_{\frac{1}{2}} (\log_2 x) \right] = \log_3 \left[\log_{\frac{1}{3}} (\log_3 y) \right] = \log_5 \left[\log_{\frac{1}{5}} (\log_5 z) \right] = 0$, 那么将 x, y, z 从小到大排列为 _____。

练习 4.27 设对任意实数 $x_0 > x_1 > x_2 > x_3 > 0$, 都有 $\log_{\frac{x_0}{x_1}} 1993 + \log_{\frac{x_1}{x_2}} 1993 + \log_{\frac{x_2}{x_3}} 1993 > k \log_{\frac{x_0}{x_3}} 1993$ 恒成立, 则 k 的最大值为 _____。

练习 4.28 实数 x, y 满足 $4x^2 - 5xy + 4y^2 = 5$, 设 $S = x^2 + y^2$, 则 $\frac{1}{S_{\max}} + \frac{1}{S_{\min}}$ 的值为 _____。

练习 4.29 已知 $0 < b < 1$, $0^\circ < \alpha < 45^\circ$, 则以下三个数: $x = (\sin \alpha)^{\log_b \sin \alpha}$, $y = (\cos \alpha)^{\log_b \cos \alpha}$, $z = (\sin \alpha)^{\log_b \cos \alpha}$ 从小到大排列为 _____。

练习 4.30 用 $[x]$ 表示不超过 x 的最大整数, 则方程 $\lg^2 x - [\lg x] - 2 = 0$ 的实根个数是_____。

练习 4.31 设 $a = \lg z + \lg [x(yz)^{-1} + 1]$, $b = \lg x^{-1} + \lg [xyz + 1]$, $c = \lg y + \lg [(xyz)^{-1} + 1]$, 记 a, b, c 中的最大数为 M , 则 M 的最小值为_____。

练习 4.32 设 $x, y, z \in \mathbb{R}^+$ 且 $x + y + z = 1$, 求 $u = \frac{3x^2 - x}{1 + x^2} + \frac{3y^2 - y}{1 + y^2} + \frac{3z^2 - z}{1 + z^2}$ 的最小值。

练习 4.33 当 a 为何值时, 不等式 $\log_{\frac{1}{a}}(\sqrt{x^2 + ax + 5} + 1) \cdot \log_5(x^2 + ax + 6) + \log_a 3 \geq 0$ 有且只有一个解 ($a > 1$ 且 $a \neq 1$)。

练习 4.34 求定义在有理数集上且满足下列条件的所有函数 f :

$$f(x+y) = f(x) + f(y) + f(x) \cdot f(y), \quad x, y \in \mathbb{Q}.$$

练习 4.35 $f(x)$ 是定义在 $(1, +\infty)$ 上且在 $(1, +\infty)$ 中取值的函数, 满足条件: 对于任何 $x, y > 1$ 及 $u, v > 0$, $f(x^u y^v) \leq [f(x)]^{\frac{1}{4u}} [f(y)]^{\frac{1}{4v}}$ 都成立, 试确定所有这样的函数 $f(x)$ 。

练习 4.36 求所有函数 $f: \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}$, 使得 $xf(x) - yf(y) = (x - y)f(x + y)$ 成立。

练习 4.37 是否存在函数 $f(n)$, 将正整数集 $\mathbb{N}^*$ 映为自身, 且对每个 $n > 1$, $f(n) = f(f(n - 1)) + f(f(n + 1))$ 都成立。

练习 4.38 设 α, β 为实数, 求所有 $f: \mathbb{R}^+ \rightarrow \mathbb{R}$, 使得对任意的 $x, y \in \mathbb{R}^+$, $f(x)f(y) = y^\beta \cdot f\left(\frac{x}{2}\right) + x^\alpha f\left(\frac{y}{2}\right)$ 成立。

练习 4.39 对于任意 $n \in \mathbb{N}_+ (n > 1)$, 试证明: $[\sqrt{n}] + [\sqrt[3]{n}] + \cdots + [\sqrt[n]{n}] = [\log_2 n] + [\log_3 n] + \cdots + [\log_n n]$ 。

4.6 D 组

练习 4.40 设 $m \geq 14$ 是一个整数, 函数 $f: \mathbb{N} \rightarrow \mathbb{N}$ 定义如下:

$$f(n) = \begin{cases} n - m + 14 & n > m^2 \\ f(f(n + m - 13)) & n \leq m^2 \end{cases}$$

求出所有的 m , 使得 $f(1995) = 1995$ 。

练习 4.41 设 p, q 是任意自然数, 求证: 存在这样的 $f(x) \in \mathbb{Z}[x]$ (表示整系数多项式集合), 使对 x 轴上的某个长为 $\frac{1}{q}$ 的开区间中的每一个数 x , 有 $|f(x) - \frac{p}{q}| < \frac{1}{q^2}$ 。

第五章 不等式

5.1 基础知识

定理 5.1: 不等式的基本性质 对于任意实数 a, b, c , 不等式满足以下基本性质:

1. $a > b \Leftrightarrow a - b > 0$;
2. 传递性: $a > b, b > c \Rightarrow a > c$;
3. 可加性: $a > b \Rightarrow a + c > b + c$;
4. 正乘不变向: $a > b, c > 0 \Rightarrow ac > bc$;
5. 负乘变向: $a > b, c < 0 \Rightarrow ac < bc$;
6. 同向正值可乘性: $a > b > 0, c > d > 0 \Rightarrow ac > bd$;
7. 正值乘方性: $a > b > 0, n \in \mathbb{N}_+ \Rightarrow a^n > b^n$;
8. 正值开方性: $a > b > 0, n \in \mathbb{N}_+ \Rightarrow \sqrt[n]{a} > \sqrt[n]{b}$;

定理 5.2: 基本不等式 对于任意实数 a, b, c , 不等式满足以下基本性质:

1. 绝对值不等式 1: $a > 0, |x| < a \Leftrightarrow -a < x < a; |x| > a \Leftrightarrow x > a \text{ 或 } x < -a$;
2. 绝对值三角不等式: $a, b \in \mathbb{R}$, 则 $|a| - |b| \leq |a + b| \leq |a| + |b|$;
3. 基本二元均值不等式: $a, b \in \mathbb{R}$, 则 $(a - b)^2 \geq 0 \Leftrightarrow a^2 + b^2 \geq 2ab$;
4. 基本三元均值不等式: $x, y, z \in \mathbb{R}^+$, 则 $x + y \geq 2\sqrt{xy}, x + y + z \geq 3\sqrt[3]{xyz}$, 等号当且仅当变量相等时成立.

5.1.1 几个常用的不等式

定理 5.3: 平均值不等式 设 $a_1, a_2, \dots, a_n \in \mathbb{R}^+$, 记

$$\text{调和平均 } H_n = \frac{n}{\frac{1}{a_1} + \frac{1}{a_2} + \dots + \frac{1}{a_n}},$$

$$\text{几何平均 } G_n = \sqrt[n]{a_1 a_2 \cdots a_n},$$

$$\text{算术平均 } A_n = \frac{a_1 + a_2 + \dots + a_n}{n},$$

$$\text{平方平均 } Q_n = \sqrt{\frac{a_1^2 + a_2^2 + \dots + a_n^2}{n}},$$

则有 $H_n \leq G_n \leq A_n \leq Q_n$, 其中等号成立的条件均为 $a_1 = a_2 = \dots = a_n$.

定理 5.4: 柯西不等式 若 $a_i \in \mathbb{R}, b_i \in \mathbb{R}, i = 1, 2, \dots, n$, 则

$$\left(\sum_{i=1}^n a_i^2\right) \left(\sum_{i=1}^n b_i^2\right) \geq \left(\sum_{i=1}^n a_i b_i\right)^2$$

等号当且仅当存在 $\lambda \in \mathbb{R}$, 使得对任意 $i = 1, 2, \dots, n$, $a_i = \lambda b_i$ 时成立.

推论 1: 若 $a_i \in \mathbb{R}, b_i \in \mathbb{R}^+, i = 1, 2, \dots, n$, 则

$$\sum_{i=1}^n \frac{a_i^2}{b_i} \geq \frac{(\sum_{i=1}^n a_i)^2}{\sum_{i=1}^n b_i}$$

等号成立当且仅当 $a_i = \lambda b_i (i = 1, 2, \dots, n)$.

推论 2: 若 $a_i \in \mathbb{R}, b_i \in \mathbb{R}^+, i = 1, 2, \dots, n$, 则

$$\sum_{i=1}^n \frac{a_i}{b_i} \geq \frac{(\sum_{i=1}^n a_i)^2}{\sum_{i=1}^n a_i b_i}$$

等号成立当且仅当 $b_1 = b_2 = \dots = b_n$.

定理 5.5: 排序不等式 若两组实数满足 $a_1 \leq a_2 \leq \cdots \leq a_n$ 且 $b_1 \leq b_2 \leq \cdots \leq b_n$, 则对于 $b_1, b_2, \cdots, b_n$ 的任意排列 $b_{i_1}, b_{i_2}, \cdots, b_{i_n}$, 有

$$\underbrace{a_1 b_n + a_2 b_{n-1} + \cdots + a_n b_1}_{\text{逆序和}} \leq \underbrace{a_1 b_{i_1} + a_2 b_{i_2} + \cdots + a_n b_{i_n}}_{\text{乱序和}} \leq \underbrace{a_1 b_1 + a_2 b_2 + \cdots + a_n b_n}_{\text{顺序和}}.$$

5.2 方法与例题

5.2.1 不等式证明的基本方法

比较法

例题 5.1 设 $a, b, c \in \mathbb{R}$, 试证: 对任意实数 x, y, z , 有

$$x^2 + y^2 + z^2 \geqslant 2\sqrt{\frac{abc}{(a+b)(b+c)(c+a)}} \left(\sqrt{\frac{a+b}{c}}xy + \sqrt{\frac{b+c}{a}}yz + \sqrt{\frac{c+a}{b}}xz \right).$$

例题 5.2 若 $0 < x < 1$, 比较大小: $|\log_a(1-x)|$ 与 $|\log_a(1+x)|$.

分析法

例题 5.3 已知 $a, b, c \in \mathbb{R}^+$, 求证: $a + b + c - 3\sqrt[3]{abc} \geq a + b - 2\sqrt{ab}$.

例题 5.4 已知实数 a, b, c 满足 $0 < a \leq b \leq c \leq \frac{1}{2}$, 求证: $\frac{2}{c(1-c)} \leq \frac{1}{a(1-b)} + \frac{1}{b(1-a)}$.

数学归纳法

例题 5.5 对任意正整数 $n(\geq 3)$, 求证: $n^{n+1} > (n+1)^n$.

反证法

例题 5.6 设实数 $a_0, a_1, \dots, a_n$ 满足 $a_0 = a_n = 0$, 且 $a_0 - 2a_1 + a_2 \geq 0, a_1 - 2a_2 + a_3 \geq 0, \dots, a_{n-2} - 2a_{n-1} + a_n \geq 0$, 求证: $a_k \leq 0 (k = 1, 2, \dots, n-1)$.

分类讨论法

例题 5.7 已知 $x, y, z \in \mathbb{R}^+$, 求证: $\frac{x^2-y^2}{y+z} + \frac{y^2-z^2}{z+x} + \frac{z^2-x^2}{x+y} \geq 0$.

放缩法

例题 5.8 求证: $1 + \frac{1}{2} + \frac{1}{3} + \cdots + \frac{1}{2^n-1} < n (n \geq 2)$.

例题 5.9 已知 a, b, c 是 $\triangle ABC$ 的三条边长, $m > 0$, 求证: $\frac{a}{a+m} + \frac{b}{b+m} > \frac{c}{c+m}$.

引入参变量法

例题 5.10 已知 $x, y \in \mathbb{R}^+$, $x + y = l$, a, b 为待定正数, 求 $f(x, y) = \frac{a^3}{x^2} + \frac{b^3}{y^2}$ 的最小值.

例题 5.11 设 $x_1 \geq x_2 \geq x_3 \geq x_4 \geq 2$, $x_2 + x_3 + x_4 \geq x_1$, 求证: $(x_1 + x_2 + x_3 + x_4)^2 \leq 4x_1x_2x_3x_4$.

局部不等式

例题 5.12 已知 $x, y, z \in \mathbb{R}^+$ 且 $x^2 + y^2 + z^2 = 1$, 求证: $\frac{x}{1-x^2} + \frac{y}{1-y^2} + \frac{z}{1-z^2} \geq \frac{3\sqrt{3}}{2}$.

例题 5.13 已知 $0 \leq a, b, c \leq 1$, 求证: $\frac{a}{bc+1} + \frac{b}{ca+1} + \frac{c}{ab+1} \leq 2$.

利用函数的思想

例题 5.14 已知非负实数 a, b, c 满足 $ab + bc + ca = 1$, 求 $f(a, b, c) = \frac{1}{a+b} + \frac{1}{b+c} + \frac{1}{c+a}$ 的最小值.

例题 5.15 已知 $a_1, a_2, \dots, a_n \in \mathbb{R}^+$, 求证: $\frac{a_1^2}{a_2} + \frac{a_2^2}{a_3} + \dots + \frac{a_{n-1}^2}{a_n} + \frac{a_n^2}{a_1} \geq a_1 + a_2 + \dots + a_n$.

5.3 A 组

练习 5.1 已知 $0 < x < 1$, $a, b \in \mathbb{R}^+$, 则 $\frac{a^2}{x} + \frac{b^2}{1-x}$ 的最小值是 _____.

练习 5.2 已知 $x \in \mathbb{R}^+$, 则 $x + \frac{1}{x^2}$ 的最小值是 _____.

练习 5.3 已知 $a, b, c \in \mathbb{R}$, 且 $a^2 + b^2 + c^2 = 1$, $ab + bc + ca$ 的最大值为 M , 最小值为 N , 则 $MN =$ _____.

练习 5.4 若不等式 $-3 < \frac{x^2+ax-1}{x^2-x+1} < 2$ 对所有实数 x 成立, 则 a 的取值范围是 _____.

练习 5.5 若不等式 $\sqrt{2x+1} < x+a$ 的解是 $x > m$, 则 m 的最小值是 _____.

练习 5.6 “ $a+b=1$ ”是“不等式 $|x-a|+|x-b|<8$ 的解集是 $\{x \mid -2 < x < 6\}$ ”的 _____ 条件.

练习 5.7 若 $a, b \in \mathbb{R}^+$ 且 $a+b=1$, 以下结论成立的有 _____. (1) $a^4+b^4 \geq \frac{1}{8}$; (2) $\frac{1}{4} \leq a^3+b^3 < 1$; (3) $\frac{1}{a^2} + \frac{1}{b^2} \geq \frac{2}{ab}$; (4) $\sqrt{a+\frac{1}{2}} + \sqrt{b+\frac{1}{2}} \leq 2$; (5) $\frac{b+1}{2} \lg a < \sqrt{b} \lg a$.

练习 5.8 已知 $0 < \theta < \pi$, 若 $\sin \frac{\theta}{2}(1 + \cos \theta) = \frac{4\sqrt{3}}{9}$, 则 $\theta =$ _____.

练习 5.9 已知 $\bar{x} = \frac{x_1+x_2+\cdots+x_n}{n}$, $p = (x_1 - \bar{x})^2 + (x_2 - \bar{x})^2 + \cdots + (x_n - \bar{x})^2$, $q = (x_1 - a)^2 + (x_2 - a)^2 + \cdots + (x_n - a)^2$, 若 $a \neq \bar{x}$, 则比较大小: p _____ q .

练习 5.10 已知 $a > 0, b > 0$ 且 $a \neq b, m = a^a b^b, n = a^b b^a$, 则比较大小: m _____ n .

练习 5.11 已知 $n \in \mathbb{N}_+$, 求证: $1 + \frac{1}{2^2} + \cdots + \frac{1}{n^2} \geq \frac{3n}{2n+1}$.

练习 5.12 已知 $0 < a < 1, x^2 + y = 0$, 求证: $\log_a(a^x + a^y) \leq \log_a 2 + \frac{1}{8}$.

练习 5.13 已知 $x \in \mathbb{R}, x \neq 0$, 求证: $\frac{x}{1-2^x} < \frac{x}{2}$.

5.4 B 组

练习 5.14 已知 $A = a \sin^2 x + b \cos^2 x$, $B = a \cos^2 x + b \sin^2 x$ ($a, b, x \in \mathbb{R}$), 设 $m = AB$, $n = ab$, $P = A^2 + B^2$, $q = a^2 + b^2$, 则下列结论成立的有 _____. (1) $m \geq n$, $p \geq q$; (2) $m \leq n$, $p \leq q$; (3) $m + p \geq n + q$; (4) $m + q \geq n + p$.

练习 5.15 已知 $a, b, c, d \in \mathbb{R}$, $M = 4(a-b)(c-d)$, $N = (a-b)(c-b) + (d-a)(d-c) + (c-d)(c-b) + (a-b)(a-d)$, 则比较大小: M _____ N (填 $>$ 、 $<$ 、 $\geq$ 、 $\leq$).

练习 5.16 若 $a \neq b$, $a, b \in \mathbb{R}^+$, 且 $a < \sqrt{3}$, $b = \frac{a+3}{a+1}$, 将 $\sqrt{3}, a, b, \frac{a+b}{2}$ 从小到大排列为 _____.

练习 5.17 已知 $\triangle ABC$ 的三边长 a, b, c 满足 $b+c \leq 2a$, $a+c \leq 2b$, 则 $\frac{b}{a}$ 的取值范围是 _____.

练习 5.18 若实数 x, y 满足 $|x|+|y| \leq 1$, 则 $z = x^2 - xy + y^2$ 的最大值与最小值的和为 _____.

练习 5.19 设函数 $f(x) = \sqrt{2-x} + \sqrt{3x+12} (x \in [-4, 2])$, 则 $f(x)$ 的值域是 _____.

练习 5.20 对 $x_1 > x_2 > 0, 1 > a > 0$, 记 $y_1 = \frac{x_1}{1+a} + \frac{ax_2}{1+a}, y_2 = \frac{ax_1}{1+a} + \frac{x_2}{1+a}$, 比较大小: x_1x_2 _____ y_1y_2 .

练习 5.21 已知函数 $y = \frac{a+\sin x}{1+\cos x}$ 的值域是 $[-\frac{4}{3}, +\infty)$, 则实数 a 的值为 _____.

练习 5.22 设 $a \leq b < c$ 是直角 $\triangle ABC$ 的三边长, 若不等式

$$\frac{1}{a} + \frac{1}{b} + \frac{1}{c} \geq \frac{M}{a+b+c}$$

恒成立, 则 M 最大值为 _____.

练习 5.23 实系数方程 $x^2 + ax + 2b = 0$ 的一个根大于 0 且小于 1, 另一个根大于 1 且小于 2, 则 $\frac{b-2}{a-1}$ 的取值范围是 _____.

练习 5.24 已知 $a, b, c \in \mathbb{R}^+$ 且满足 $a + b + c \geq abc$, 求证: 下列三个式子中至少有两个成立:

$$\frac{6}{a} + \frac{3}{b} + \frac{2}{c} \geq 2, \quad \frac{6}{b} + \frac{3}{c} + \frac{2}{a} \geq 2, \quad \frac{6}{c} + \frac{3}{a} + \frac{2}{b} \geq 2.$$

练习 5.25 已知 $a, b \in \mathbb{R}$ 且 $\frac{1}{a} + \frac{1}{b} = 1$, 求证: 对一切 $n \in \mathbb{N}_+$, $(a+b)^n - a^n - b^n \geq 2^{2n} - 2^{n+1}$.

练习 5.26 已知 $a, b, c \in \mathbb{R}$, 求证: $\frac{c}{a+b} + \frac{a}{b+c} + \frac{b}{c+a} \geq \frac{3}{2}$.

练习 5.27 设 x, y, z 是 3 个不全为零的实数, 求 $\frac{xy+2yz}{x^2+y^2+z^2}$ 的最大值.

5.5 C 组

练习 5.28 已知 $a_1, a_2, b_1, b_2, c_1, c_2 \in \mathbb{R}$, $a_1c_1 - b_1^2 = a_2c_2 - b_2^2 > 0$, $P = (a_1 - a_2)(c_1 - c_2)$, $Q = (b_1 - b_2)^2$, 比较大小: P _____ Q (填 $>$ 、 $<$ 、 $\geq$ 、 $\leq$) .

练习 5.29 已知 $x^2 + y^2 - xy = 1$, 则 $|x + y - 3| + |x + y + 2|$ 的最大值为 _____, 最小值为 _____.

练习 5.30 设实数 a, b, c, d 满足 $a \leq b \leq c \leq d$ 或者 $a \geq b \geq c \geq d$, 比较大小: $4(a + c + d)(a + b + d)$ _____ $(2a + 3d + c)(2a + 2b + c + d)$ (填 $>$ 、 $<$ 、 $\geq$ 、 $\leq$) .

练习 5.31 已知 $x_i \in \mathbb{R}^+$, $i = 1, 2, \dots, n$ 且 $\sum_{i=1}^n \frac{1}{1+x_i} = 1$, 则 $x_1x_2 \cdots x_n$ 的最小值为 _____ (这里 $n > 1$) .

练习 5.32 已知 $x, y \in \mathbb{R}$, $f(x, y) = x^2 + 6y^2 - 2xy - 14x - 6y + 72$ 的最小值为 _____.

练习 5.33 已知 $0 \leq a_k \leq 1 (k = 1, 2, \dots, 2n)$, 记 $a_{2n+1} = a_1, a_{2n+2} = a_2$, 则 $\sum_{k=1}^{2n} (a_k - a_{k+1}a_{k+2})$ 的最大值为 _____.

练习 5.34 已知 $0 \leq x \leq 1, 0 \leq y \leq 1, 0 \leq z \leq 1$, 则 $\frac{x}{yz+1} + \frac{y}{zx+1} + \frac{z}{xy+1}$ 的最大值为 _____.

练习 5.35 已知 $\frac{3}{2} \leq x \leq 5$, 求证: $2\sqrt{x+1} + \sqrt{2x-3} + \sqrt{15-3x} < 2\sqrt{19}$.

练习 5.36 对于不全相等的正整数 a, b, c , 求证: $\frac{a+b+c}{3} \geq \sqrt[3]{abc + \frac{10}{27}}$.

练习 5.37 已知 $a_i > 0 (i = 1, 2, \dots, n)$ 且 $\sum_{i=1}^n a_i = 1$, 又 $0 < \lambda_1 \leq \lambda_2 \leq \dots \leq \lambda_n$, 求证:

$$\left(\sum_{i=1}^n \lambda_i a_i \right) \left(\sum_{i=1}^n \frac{a_i}{\lambda_i} \right) \leq \frac{(\lambda_1 + \lambda_n)^2}{4\lambda_1 \lambda_n}.$$

5.6 D 组

练习 5.38 设正实数 x, y, z 满足 $x + y + z = 1$, 求证:

$$\frac{xy}{\sqrt{xy+yz}} + \frac{yz}{\sqrt{yz+xz}} + \frac{xz}{\sqrt{xz+xy}} \leq \frac{\sqrt{2}}{2}.$$

练习 5.39 设整数 $x_1, x_2, \dots, x_n$ 与 $y_1, y_2, \dots, y_m$ 满足 $1 < x_1 < x_2 < \dots < x_n < y_1 < y_2 < \dots < y_m$, $x_1 + x_2 + \dots + x_n > y_1 + y_2 + \dots + y_m$, 求证: $x_1 x_2 \cdots x_n > y_1 y_2 \cdots y_m$.

练习 5.40 设 $f(x) = x^2 + a$, 记 $f^1(x) = f(x)$, $f^n(x) = f(f^{n-1}(x)) (n = 2, 3, \dots)$, $M = \{a \in \mathbb{R} \mid \text{对所有正整数 } n, |f^n(0)| \leq 2\}$, 求证: $M = [-2, \frac{1}{4}]$.

练习 5.41 给定正数 λ 和正整数 $n(n \geq 2)$, 求最小的正数 $M(\lambda)$, 使得对于所有非负实数 $x_1, x_2, \dots, x_n$, 有

$$M(\lambda) \left(\sum_{k=1}^n x_k \right)^n \geq \sum_{k=1}^n x_k^n + \lambda \prod_{k=1}^n x_k.$$

练习 5.42 已知 $x, y, z \in \mathbb{R}$, 求证:

$$(xy + yz + zx) \left[\frac{1}{(x+y)^2} + \frac{1}{(y+z)^2} + \frac{1}{(z+x)^2} \right] \geq \frac{9}{4}.$$

练习 5.43 已知非负实数 a, b, c 满足 $a + b + c = 1$, 求证:

$$2 \leq (1 - a^2)^2 + (1 - b^2)^2 + (1 - c^2)^2 \leq (1 + a)(1 + b)(1 + c),$$

并求出等号成立的条件.

第六章 三角函数

6.1 基础知识

定义 6.1: 角的定义 一条射线绕着它的端点旋转得到的图形叫做角。若旋转方向为逆时针方向，则角为正角；若旋转方向为顺时针方向，则角为负角；若不旋转则为零角，角的大小是任意的。

定义 6.2: 角度制与弧度制 角度制：把一周角 360 等分，每一等份为 1 度。弧度制：把等于半径长的圆弧所对的圆心角叫做 1 弧度。换算关系： $360^\circ = 2\pi$ 弧度。若圆心角的弧长为 L ，则其弧度数的绝对值 $|\alpha| = \frac{L}{r}$ ，其中 r 是圆的半径。

定义 6.3: 三角函数的定义 在直角坐标平面内，把角 α 的顶点放在原点，始边与 x 轴的正半轴重合，在角的终边上任意取一个不同于原点的点 P ，设它的坐标为 (x, y) ，到原点的距离为 r ，则定义：

$$\begin{aligned} \text{正弦函数 } \sin \alpha &= \frac{y}{r}, & \text{余弦函数 } \cos \alpha &= \frac{x}{r}, \\ \text{正切函数 } \tan \alpha &= \frac{y}{x}, & \text{余切函数 } \cot \alpha &= \frac{x}{y}, \\ \text{正割函数 } \sec \alpha &= \frac{r}{x}, & \text{余割函数 } \csc \alpha &= \frac{r}{y}. \end{aligned}$$

定理 6.1: 同角三角函数的基本关系式 同角三角函数满足以下基本关系:

1. 倒数关系: $\tan \alpha = \frac{1}{\cot \alpha}$, $\sin \alpha = \frac{1}{\csc \alpha}$, $\cos \alpha = \frac{1}{\sec \alpha}$;
2. 商数关系: $\tan \alpha = \frac{\sin \alpha}{\cos \alpha}$, $\cot \alpha = \frac{\cos \alpha}{\sin \alpha}$;
3. 乘积关系: $\tan \alpha \cdot \cos \alpha = \sin \alpha$, $\cot \alpha \cdot \sin \alpha = \cos \alpha$;
4. 平方关系: $\sin^2 \alpha + \cos^2 \alpha = 1$, $\tan^2 \alpha + 1 = \sec^2 \alpha$, $\cot^2 \alpha + 1 = \csc^2 \alpha$ 。

定理 6.2: 三角函数诱导公式 三角函数诱导公式遵循“奇变偶不变, 符号看象限”原则, 核心公式如下:

1. $\sin(\alpha + \pi) = -\sin \alpha$, $\cos(\pi + \alpha) = -\cos \alpha$, $\tan(\pi + \alpha) = \tan \alpha$, $\cot(\pi + \alpha) = \cot \alpha$;
2. $\sin(-\alpha) = -\sin \alpha$, $\cos(-\alpha) = \cos \alpha$, $\tan(-\alpha) = -\tan \alpha$, $\cot(-\alpha) = -\cot \alpha$;
3. $\sin(\pi - \alpha) = \sin \alpha$, $\cos(\pi - \alpha) = -\cos \alpha$, $\tan(\pi - \alpha) = -\tan \alpha$, $\cot(\pi - \alpha) = -\cot \alpha$;
4. $\sin\left(\frac{\pi}{2} - \alpha\right) = \cos \alpha$, $\cos\left(\frac{\pi}{2} - \alpha\right) = \sin \alpha$, $\tan\left(\frac{\pi}{2} - \alpha\right) = \cot \alpha$ 。

定理 6.3: 正弦函数的性质 正弦函数 $y = \sin x$ ($x \in \mathbb{R}$) 具有以下性质:

1. 单调性: 在区间 $[2k\pi - \frac{\pi}{2}, 2k\pi + \frac{\pi}{2}]$ 上为增函数, 在区间 $[2k\pi + \frac{\pi}{2}, 2k\pi + \frac{3\pi}{2}]$ 上为减函数;
2. 周期性: 最小正周期为 2π ;
3. 奇偶性: 奇函数;
4. 有界性: 值域为 $[-1, 1]$, 当且仅当 $x = 2k\pi + \frac{\pi}{2}$ 时取最大值 1, 当且仅当 $x = 2k\pi - \frac{\pi}{2}$ 时取最小值-1;
5. 对称性: 直线 $x = k\pi + \frac{\pi}{2}$ 均为其对称轴, 点 $(k\pi, 0)$ 均为其对称中心, 其中 $k \in \mathbb{Z}$ 。

定理 6.4: 余弦函数的性质 余弦函数 $y = \cos x$ ($x \in \mathbb{R}$) 具有以下性质:

1. 单调性: 在区间 $[2k\pi, 2k\pi + \pi]$ 上单调递减, 在区间 $[2k\pi - \pi, 2k\pi]$ 上单调递增;
2. 周期性: 最小正周期为 2π ;
3. 奇偶性: 偶函数;
4. 有界性: 值域为 $[-1, 1]$, 当且仅当 $x = 2k\pi$ 时取最大值 1, 当且仅当 $x = 2k\pi - \pi$ 时取最小值-1;
5. 对称性: 直线 $x = k\pi$ 均为其对称轴, 点 $(k\pi + \frac{\pi}{2}, 0)$ 均为其对称中心, 其中 $k \in \mathbb{Z}$ 。

定理 6.5: 正切函数的性质 正切函数 $y = \tan x$ ($x \neq k\pi + \frac{\pi}{2}, k \in \mathbb{Z}$) 具有以下性质:

1. 单调性: 在开区间 $(k\pi - \frac{\pi}{2}, k\pi + \frac{\pi}{2})$ 上为增函数;
2. 周期性: 最小正周期为 π ;
3. 奇偶性: 奇函数;
4. 值域: $(-\infty, +\infty)$;
5. 对称性: 点 $(k\pi, 0)$ 、 $(k\pi + \frac{\pi}{2}, 0)$ 均为其对称中心, 其中 $k \in \mathbb{Z}$ 。

定理 6.6: 三角函数的图象变换 $y = \sin x$ 的图象经过以下变换可得到 $y = A \sin(\omega x + \varphi)$ ($\omega, \varphi > 0, |A|$ 为振幅) 的图象:

1. 上下平移: $y = \sin x + k$, $k > 0$ 向上平移, $k < 0$ 向下平移;
2. 左右平移 (相位变换): $y = \sin(x + \varphi)$, $\varphi > 0$ 向左平移 φ 个单位, $\varphi < 0$ 向右平移 $|\varphi|$ 个单位;
3. 周期变换: 纵坐标不变, 横坐标变为原来的 $\frac{1}{\omega}$, 得到 $y = \sin \omega x$ 的图象;
4. 振幅变换: 横坐标不变, 纵坐标变为原来的 A 倍, 得到 $y = A \sin x$ 的图象。

注: $y = A \sin(\omega x + \varphi)$ 的图象向右平移 $\frac{\varphi}{\omega}$ 个单位得到 $y = A \sin \omega x$ 的图象。

定理 6.7: 两角和与差的基本公式 两角和与差的三角函数满足以下基本关系式:

$$\cos(\alpha \pm \beta) = \cos \alpha \cos \beta \mp \sin \alpha \sin \beta,$$

$$\sin(\alpha \pm \beta) = \sin \alpha \cos \beta \pm \cos \alpha \sin \beta,$$

$$\tan(\alpha \pm \beta) = \frac{\tan \alpha \pm \tan \beta}{1 \mp \tan \alpha \tan \beta}.$$

定理 6.8: 和差化积与积化和差公式 三角函数的和差化积公式:

$$\sin \alpha + \sin \beta = 2 \sin \left(\frac{\alpha + \beta}{2} \right) \cos \left(\frac{\alpha - \beta}{2} \right),$$

$$\sin \alpha - \sin \beta = 2 \sin \left(\frac{\alpha - \beta}{2} \right) \cos \left(\frac{\alpha + \beta}{2} \right),$$

$$\cos \alpha + \cos \beta = 2 \cos \left(\frac{\alpha + \beta}{2} \right) \cos \left(\frac{\alpha - \beta}{2} \right),$$

$$\cos \alpha - \cos \beta = -2 \sin \left(\frac{\alpha + \beta}{2} \right) \sin \left(\frac{\alpha - \beta}{2} \right).$$

三角函数的积化和差公式:

$$\sin \alpha \cos \beta = \frac{1}{2} [\sin(\alpha + \beta) + \sin(\alpha - \beta)], \quad \cos \alpha \sin \beta = \frac{1}{2} [\sin(\alpha + \beta) - \sin(\alpha - \beta)],$$

$$\cos \alpha \cos \beta = \frac{1}{2} [\cos(\alpha + \beta) + \cos(\alpha - \beta)], \quad \sin \alpha \sin \beta = -\frac{1}{2} [\cos(\alpha + \beta) - \cos(\alpha - \beta)].$$

定理 6.9: 倍角公式 三角函数的二倍角公式如下:

$$\sin 2\alpha = 2 \sin \alpha \cos \alpha,$$

$$\cos 2\alpha = \cos^2 \alpha - \sin^2 \alpha = 2 \cos^2 \alpha - 1 = 1 - 2 \sin^2 \alpha,$$

$$\tan 2\alpha = \frac{2 \tan \alpha}{1 - \tan^2 \alpha}.$$

定理 6.10: 半角公式 三角函数的半角公式如下:

$$\sin \left(\frac{\alpha}{2} \right) = \pm \sqrt{\frac{1 - \cos \alpha}{2}}, \quad \cos \left(\frac{\alpha}{2} \right) = \pm \sqrt{\frac{1 + \cos \alpha}{2}},$$

$$\tan \left(\frac{\alpha}{2} \right) = \pm \sqrt{\frac{1 - \cos \alpha}{1 + \cos \alpha}} = \frac{\sin \alpha}{1 + \cos \alpha} = \frac{1 - \cos \alpha}{\sin \alpha}.$$

定理 6.11: 万能公式 三角函数的万能公式 (令 $t = \tan \frac{\alpha}{2}$) 如下:

$$\sin \alpha = \frac{2t}{1+t^2}, \quad \cos \alpha = \frac{1-t^2}{1+t^2}, \quad \tan \alpha = \frac{2t}{1-t^2}.$$

定理 6.12: 辅助角公式 如果 a, b 是实数且 $a^2 + b^2 \neq 0$, 取始边在 x 轴正半轴, 终边经过点 (a, b) 的一个角为 β , 则 $\sin \beta = \frac{b}{\sqrt{a^2+b^2}}$, $\cos \beta = \frac{a}{\sqrt{a^2+b^2}}$, 对任意的角 α , 有:

$$a \sin \alpha + b \cos \alpha = \sqrt{a^2 + b^2} \sin(\alpha + \beta).$$

定理 6.13: 正弦定理 在任意 $\triangle ABC$ 中, 有:

$$\frac{a}{\sin A} = \frac{b}{\sin B} = \frac{c}{\sin C} = 2R,$$

其中 a, b, c 分别是角 A, B, C 的对边, R 为 $\triangle ABC$ 外接圆半径。

定理 6.14: 余弦定理 在任意 $\triangle ABC$ 中, 有:

$$a^2 = b^2 + c^2 - 2bc \cos A,$$

其中 a, b, c 分别是角 A, B, C 的对边。

定理 6.15: 基本三角不等式 若 $x \in (0, \frac{\pi}{2})$, 则 $\sin x < x < \tan x$ 。

定义 6.4: 反三角函数 反三角函数的定义如下:

1. 反正弦函数: 函数 $y = \sin x$ ($x \in [-\frac{\pi}{2}, \frac{\pi}{2}]$) 的反函数, 记作 $y = \arcsin x$ ($x \in [-1, 1]$);
2. 反余弦函数: 函数 $y = \cos x$ ($x \in [0, \pi]$) 的反函数, 记作 $y = \arccos x$ ($x \in [-1, 1]$);
3. 反正切函数: 函数 $y = \tan x$ ($x \in (-\frac{\pi}{2}, \frac{\pi}{2})$) 的反函数, 记作 $y = \arctan x$ ($x \in (-\infty, +\infty)$);
4. 反余切函数: 函数 $y = \cot x$ ($x \in (0, \pi)$) 的反函数, 记作 $y = \operatorname{arccot} x$ ($x \in (-\infty, +\infty)$)。

定理 6.16: 三角方程的解集 三角方程的基本解集如下 ($k \in \mathbb{Z}$):

1. 若 $a \in (-1, 1)$, 方程 $\sin x = a$ 的解集是 $\{x \mid x = n\pi + (-1)^n \arcsin a, n \in \mathbb{Z}\}$;
2. 若 $a \in (-1, 1)$, 方程 $\cos x = a$ 的解集是 $\{x \mid x = 2k\pi \pm \arccos a, k \in \mathbb{Z}\}$;
3. 若 $a \in \mathbb{R}$, 方程 $\tan x = a$ 的解集是 $\{x \mid x = k\pi + \arctan a, k \in \mathbb{Z}\}$ 。

恒等式: $\arcsin a + \arccos a = \frac{\pi}{2}$, $\arctan a + \operatorname{arccot} a = \frac{\pi}{2}$ 。

6.2 方法与例题

6.2.1 三角函数性质的应用

例题 6.1 设 $x \in (0, \pi)$, 试比较 $\cos(\sin x)$ 与 $\sin(\cos x)$ 的大小。

例题 6.2 已知 α, β 为锐角, 且 $x \cdot (\alpha + \beta - \frac{\pi}{2}) > 0$, 求证: $\left(\frac{\cos \alpha}{\sin \beta}\right)^x + \left(\frac{\cos \beta}{\sin \alpha}\right)^x < 2$ 。

6.2.2 最小正周期的确定

例题 6.3 求函数 $y = \sin(2 \cos |x|)$ 的最小正周期。

6.2.3 换元法的使用

例题 6.4 求 $y = \frac{\sin x \cos x}{1 + \sin x + \cos x}$ 的值域。

例题 6.5 已知 $a_0 = 1$, $a_n = \frac{\sqrt{1+a_{n-1}^2}-1}{a_{n-1}} (n \in \mathbb{N}_+)$, 求证 $a_n > \frac{\pi}{2^{n+2}}$ 。

6.2.4 三角最值问题

例题 6.6 已知函数 $y = \sin x + \sqrt{1 + \cos^2 x}$, 求函数的最大值与最小值。

例题 6.7 设 $0 < \theta < \pi$, 求 $\sin \frac{\theta}{2}(1 + \cos \theta)$ 的最大值。

例题 6.8 函数 $y = \frac{2 - \sin x}{2 - \cos x}$ 的值域为 _____。

例题 6.9 若 A, B, C 为 $\triangle ABC$ 三个内角, 试求 $\sin A + \sin B + \sin C$ 的最大值。

6.2.5 三角公式的应用

例题 6.10 已知 $\sin(\alpha - \beta) = \frac{5}{13}$, $\sin(\alpha + \beta) = -\frac{5}{13}$, 且 $\alpha - \beta \in (\frac{\pi}{2}, \pi)$, $\alpha + \beta \in (\frac{3\pi}{2}, 2\pi)$, 求 $\sin 2\alpha$, $\cos 2\beta$ 的值。

例题 6.11 已知 $\triangle ABC$ 的三个内角 A, B, C 成等差数列, 且 $\frac{1}{\cos A} + \frac{1}{\cos C} = -\frac{\sqrt{2}}{\cos B}$, 试求 $\cos \frac{A-C}{2}$ 的值。

例题 6.12 求值: $\tan 20^\circ + 4 \cos 70^\circ$ 。

6.3 A 组

练习 6.1 已知锐角 α 的终边上一点 A 的坐标为 $(2\sin 3, -2\cos 3)$, 则 α 的弧度数为 _____。

练习 6.2 适合 $\sqrt{\frac{1+\cos x}{1-\cos x}} + \sqrt{\frac{1-\cos x}{1+\cos x}} = -2\csc x$ 的角的集合为 _____。

练习 6.3 给出下列命题: (1) 若 $\alpha \neq \beta$, 则 $\sin \alpha \neq \sin \beta$; (2) 若 $\sin \alpha \neq \sin \beta$, 则 $\alpha \neq \beta$; (3) 若 $\sin \alpha > 0$, 则 α 为第一或二象限角; (4) 若 α 为第一或第二象限角, 则 $\sin \alpha > 0$ 。上述四个命题中, 正确的命题有 _____ 个。

练习 6.4 已知 $\sin x + \cos x = \frac{1}{5} (x \in (0, \pi))$, 则 $\cot x =$ _____。

练习 6.5 简谐振动 $x_1 = A \sin(\omega t + \frac{\pi}{3})$ 和 $x_2 = B \sin(\omega t - \frac{\pi}{6})$ 叠加后得到的合振动是 $x =$ _____。

练习 6.6 已知 $3\sin x - 4\cos x = 5\sin(x + \theta_1) = 5\sin(x - \theta_2) = 5\cos(x + \theta_3) = 5\cos(x - \theta_4)$, 则 $\theta_1, \theta_2, \theta_3, \theta_4$ 分别是第 _____ 象限角。

练习 6.7 已知 $\alpha, \beta \in (0, \pi)$, $\tan \frac{\alpha}{2} = \frac{1}{2}$, $\sin(\alpha + \beta) = \frac{5}{13}$, 求 $\cos \beta$ 的值。

6.4 B 组

练习 6.8 已知一扇形中心角是 α , 所在圆半径为 R , 若其周长为定值 $c(c > 0)$, 当扇形面积最大时, $\alpha =$ _____。

练习 6.9 函数 $f(x) = 2\sin x(\sin x + \cos x)$ 的单调递减区间是 _____。

练习 6.10 方程 $2\sin\left(2x + \frac{\pi}{6}\right) - \lg x = 0$ 的实根个数为 _____。

练习 6.11 若 $\sin \alpha + \cos \alpha = \tan \alpha$, $\alpha \in \left(0, \frac{\pi}{2}\right)$, 则 $\frac{\pi}{3}$ _____ α (填 $>$ 、 $<$ 、 $=$)。

练习 6.12 计算: $\frac{\sin 7^\circ + \cos 15^\circ \sin 8^\circ}{\cos 7^\circ - \sin 15^\circ \sin 8^\circ} =$ _____。

练习 6.13 若 $0 < y \leq x < \frac{\pi}{2}$ 且 $\tan x = 3 \tan y$, 则 $x - y$ 的最大值为 _____。

练习 6.14 已知 $f(x) = \left(\frac{1}{2}\right)^{A \sin\left(\frac{k}{5}x + \frac{\pi}{3}\right)}$ ($kA \neq 0$, $k \in \mathbb{Z}$, 且 $A \in \mathbb{R}$), (1) 试求 $f(x)$ 的最大值和最小值; (2) 若 $A > 0$, $k = -1$, 求 $f(x)$ 的单调区间; (3) 试求最小正整数 k , 使得当 x 在任意两个整数 (包括整数本身) 间变化时, 函数 $f(x)$ 至少取得一次最大值和一次最小值。

6.5 C 组

练习 6.15 满足 $\sin(\sin x + x) = \cos(\cos x - x)$ 的锐角 x 共有 _____ 个。

练习 6.16 已知 $\frac{3\pi}{2} < x < 2\pi$, 则 $\sqrt{\frac{1}{2} + \frac{1}{2}\sqrt{\frac{1}{2} + \frac{1}{2}\cos x}} =$ _____。

练习 6.17 解方程: $\sin x + 2\sin 2x = 3 + \sin 3x$ 。

练习 6.18 计算: $\frac{\cos 40^\circ + \sin 50^\circ (1 + \sqrt{3} \tan 10^\circ)}{\sin 70^\circ \sqrt{1 + \cos 40^\circ}} =$ _____。

| **练习 6.19** 计算: $\cot 15^\circ \cot 25^\circ \cot 35^\circ \cot 85^\circ =$ _____。

| **练习 6.20** 计算: $\cos^2 71^\circ + \cos 71^\circ \cos 49^\circ + \cos^2 49^\circ =$ _____。

| **练习 6.21** 计算: $(1 + \tan 1^\circ)(1 + \tan 2^\circ) \cdots (1 + \tan 44^\circ)(1 + \tan 45^\circ) =$ _____。

| **练习 6.22** 计算: $\cos \frac{\pi}{11} \cdot \cos \frac{2\pi}{11} \cdot \cos \frac{3\pi}{11} \cdot \cos \frac{4\pi}{11} \cdot \cos \frac{5\pi}{11} =$ _____。

练习 6.23 若 $x, y \in \mathbb{R}$, 则 $z = \cos x^2 + \cos y^2 - \cos xy$ 的取值范围是 _____。

练习 6.24 若 $x, y \in \mathbb{R}$, 则 $M = \cos x + \cos y + 2 \cos(x + y)$ 的最小值为 _____。

练习 6.25 若 $0 < \theta < \frac{\pi}{2}$, $m \in \mathbb{N}_+$, 比较大小: $(2m + 1) \sin^m \theta (1 - \sin \theta)$ _____ $1 - \sin^{2m+1} \theta$ (填 $>$ 、 $<$ 、 $=$)。

练习 6.26 在方程组
$$\begin{cases} \sin x + \sin y = a \\ \cos x + \cos y = b \\ \cot x \cdot \cot y = c \end{cases}$$
 中消去 x, y , 求出关于 a, b, c 的关系式。

练习 6.27 已知 $\alpha, \beta, \gamma \in (0, \frac{\pi}{2})$ 且 $\cos^2 \alpha + \cos^2 \beta + \cos^2 \gamma = 1$, 求 $\tan \alpha \tan \beta \tan \gamma$ 的最小值。

练习 6.28 求满足等式 $\sin xy = \sin x + \sin y$ 的所有实数对 (x, y) , $x, y \in (0, \frac{\pi}{2})$ 。

| **练习 6.29** $f(\theta) = 5 + 8\cos\theta + 4\cos 2\theta + \cos 3\theta$ 的最小值为 _____。

| **练习 6.30** 关于 x, y 的方程组
$$\begin{cases} x \sin 3\alpha + y \sin \alpha = a \\ x \sin 3\beta + y \sin \beta = a \\ x \sin 3\gamma + y \sin \gamma = a \end{cases}$$
 有唯一一组解,
且 $\sin \alpha, \sin \beta, \sin \gamma$ 互不相等, 求 $\sin \alpha + \sin \beta + \sin \gamma$ 的值。

6.6 D 组

练习 6.31 若 $x \in [-\frac{5\pi}{12}, -\frac{\pi}{3}]$, 则 $y = \tan(x + \frac{2\pi}{3}) - \tan(x + \frac{\pi}{6}) + \cos(x + \frac{\pi}{6})$ 的最大值是_____。

练习 6.32 设 $f(x) = x^2 - \pi x$, $\alpha = \arcsin \frac{1}{3}$, $\beta = \arctan \frac{5}{4}$, $\gamma = \arccos(-\frac{1}{3})$, $\delta = \operatorname{arccot}(-\frac{5}{4})$, 将 $f(\alpha), f(\beta), f(\gamma), f(\delta)$ 从小到大排列为_____。

练习 6.33 已知 $\alpha_1, \alpha_2, \dots, \alpha_n$ 是 n 个实常数, 考虑关于 x 的函数: $f(x) = \cos(\alpha_1 + x) + \frac{1}{2} \cos(\alpha_2 + x) + \dots + \frac{1}{2^{n-1}} \cos(\alpha_n + x)$ 。求证: 若实数 x_1, x_2 满足 $f(x_1) = f(x_2) = 0$, 则存在整数 m , 使得 $x_2 - x_1 = m\pi$ 。

练习 6.34 求实数 a 的取值范围, 使得对任意实数 x 和任意 $\theta \in [0, \frac{\pi}{2}]$, 恒有 $(x + 3 + 2 \sin \theta \cos \theta)^2 + (x + a \sin \theta + a \cos \theta)^2 \geq \frac{1}{8}$ 。

练习 6.35 已知 $\sin x + \sin y + \sin z = \cos x + \cos y + \cos z = 0$, 则 $\cos^2 x + \cos^2 y + \cos^2 z =$ _____。

练习 6.36 在 $\triangle ABC$ 中, 已知 $\frac{\sin A + \sin B + \sin C}{\cos A + \cos B + \cos C} = \sqrt{3}$, 求证: 此三角形中有一个内角为 $\frac{\pi}{3}$ 。

| **练习 6.37** 已知 α, β, γ 为锐角, 且 $\cos^2 \alpha + \cos^2 \beta + \cos^2 \gamma = 1$, 求证: $\frac{3\pi}{4} < \alpha + \beta + \gamma < \pi$ 。

| **练习 6.38** 在锐角 $\triangle ABC$ 中, $\sin A + \sin B + \sin C$ 的取值范围是 _____。

| **练习 6.39** 在 $\triangle ABC$ 中, 求 $\sin A + \sin B + \sin C - \cos A - \cos B - \cos C$ 的最大值。

练习 6.40 已知 $x > 0, y > 0$, 且 $x + y < \pi$, 求证: $w(w-1)\sin(x+y) + w(\sin x - \sin y) + \sin y > 0$ ($w \in \mathbb{R}$)。

练习 6.41 设 $x_1, x_2, \dots, x_n, \dots, y_1, y_2, \dots, y_n, \dots$ 满足 $x_1 = y_1 = \sqrt{3}$, $x_{n+1} = x_n + \sqrt{1 + x_n^2}$, $y_{n+1} = \frac{y_n}{1 + \sqrt{1 + y_n^2}}$, 求证: $2 < x_n y_n < 3$ ($n \geq 2$)。

练习 6.42 在锐角 $\triangle ABC$ 中, $\cos A = \cos \alpha \sin \beta$, $\cos B = \cos \beta \sin \gamma$, $\cos C = \cos \gamma \sin \alpha$, 则 $\tan \alpha \cdot \tan \beta \cdot \tan \gamma =$ _____。

6.7 E 组

练习 6.43 求证：对任意自然数 n ，均有 $|\sin 1| + |\sin 2| + \cdots + |\sin(3n-1)| + |\sin 3n| > \frac{8n}{5}$ 。

练习 6.44 已知 α 为锐角， $n \geq 2$ ， $n \in \mathbb{N}_+$ ，求证： $(\frac{1}{\sin^n \alpha} - 1)(\frac{1}{\cos^n \alpha} - 1) \geq 2^n - 2^{\frac{n}{2}+1} + 1$ 。

练习 6.45 设 n, m 都是正整数，并且 $n > m$ ，求证：对一切 $x \in (0, \frac{\pi}{2})$ ，都有 $2|\sin^n x - \cos^n x| \leq 3|\sin^m x - \cos^m x|$ 。

练习 6.46 求所有的实数 α , 使 $\cos \alpha, \cos 2\alpha, \cos 4\alpha, \dots, \cos 2^n \alpha, \dots$ 中的每一项均为负数。

练习 6.47 已知 $\theta_i \in (0, \frac{\pi}{2})$, $\tan \theta_1 \tan \theta_2 \cdots \tan \theta_n = 2^{\frac{n}{2}}$, $n \in \mathbb{N}_+$, 若对任意一组满足上述条件的 $\theta_1, \theta_2, \dots, \theta_n$ 都有 $\cos \theta_1 + \cos \theta_2 + \cdots + \cos \theta_n \leq \lambda$, 求 λ 的最小值。

第七章 解三角形

7.1 基础知识

在本章中约定：用 A, B, C 分别表示 $\triangle ABC$ 的三个内角， a, b, c 分别表示它们所对的各边长， $p = \frac{a+b+c}{2}$ 为半周长， R 为 $\triangle ABC$ 外接圆半径。

定理 7.1: 正弦定理 在任意 $\triangle ABC$ 中，有：

$$\frac{a}{\sin A} = \frac{b}{\sin B} = \frac{c}{\sin C} = 2R$$

定理 7.2: 正弦定理的推论 正弦定理有以下常用推论：

1. $\triangle ABC$ 的面积为 $S_{\triangle ABC} = \frac{1}{2}ab \sin C = \frac{1}{2}bc \sin A = \frac{1}{2}ca \sin B$ ；
2. 射影定理：在 $\triangle ABC$ 中，有 $b \cos C + c \cos B = a$ ；
3. 在 $\triangle ABC$ 中，若 $A + B = \theta$ ，角 α 满足 $\frac{a}{\sin \alpha} = \frac{b}{\sin(\theta - \alpha)}$ ，则 $\alpha = A$ 。

定理 7.3: 余弦定理 在任意 $\triangle ABC$ 中, 有:

$$a^2 = b^2 + c^2 - 2bc \cos A \iff \cos A = \frac{b^2 + c^2 - a^2}{2bc}$$

同理可得: $b^2 = a^2 + c^2 - 2ac \cos B$, $c^2 = a^2 + b^2 - 2ab \cos C$ 。

定理 7.4: 海伦公式 在任意 $\triangle ABC$ 中, 面积可表示为:

$$S_{\triangle ABC} = \sqrt{p(p-a)(p-b)(p-c)}$$

其中 $p = \frac{a+b+c}{2}$ 为三角形半周长。

定理 7.5: 斯特瓦特定理 在 $\triangle ABC$ 中, D 是 BC 边上任意一点, $BD = p$, $DC = q$, 则:

$$AD^2 = \frac{b^2p + c^2q}{p + q} - pq$$

定理 7.6: 中线长公式 若 D 为 BC 中点, 即 $p = q$, 则 BC 边上的中线长为:

$$AD = \frac{\sqrt{2b^2 + 2c^2 - a^2}}{2}$$

7.2 方法与例题

7.2.1 面积法

例题 7.1 (共线关系的张角公式) 如图所示, 从 O 点发出的三条射线满足 $\angle POQ = \alpha$, $\angle QOR = \beta$, 另外 OP, OQ, OR 的长分别为 u, w, v , 这里 $\alpha, \beta, \alpha + \beta \in (0, \pi)$, 求证: P, Q, R 共线的充要条件是

$$\frac{\sin \beta}{u} + \frac{\sin \alpha}{v} = \frac{\sin(\alpha + \beta)}{w}.$$

7.2.2 切线长换元

例题 7.2 在 $\triangle ABC$ 中, 求证: $a^2(b+c-a) + b^2(c+a-b) + c^2(a+b-c) \leq 3abc$ 。

7.2.3 三角换元

例题 7.3 设 $a, b, c \in \mathbb{R}^+$ 且 $abc + a + c = b$, 试求 $P = \frac{2}{a^2+1} - \frac{2}{b^2+1} + \frac{3}{c^2+1}$ 的最大值。

例题 7.4 在 $\triangle ABC$ 中, 若 $a + b + c = 1$, 求证: $a^2 + b^2 + c^2 + 4abc < \frac{1}{2}$ 。

7.3 A 组

| 练习 7.1 在 $\triangle ABC$ 中, “ $a > b$ ” 是 “ $\sin A > \sin B$ ” 的 _____ 条件。

| 练习 7.2 在 $\triangle ABC$ 中, 边 AB 为最长边, 且 $\sin A \sin B = \frac{2-\sqrt{3}}{4}$, 则 $\cos A \cos B$ 的最大值为 _____。

| 练习 7.3 在 $\triangle ABC$ 中, 若 $AB = 1$, $BC = 2$, 则 $\angle C$ 的取值范围是 _____。

| 练习 7.4 在 $\triangle ABC$ 中, $3 \sin A + 4 \cos B = 6$, $3 \cos A + 4 \sin B = 1$, 则 $\angle C =$ _____。

| 练习 7.5 在 $\triangle ABC$ 中, $\sin A = \frac{3}{5}$, $\cos B = \frac{5}{13}$, 则 $\cos C =$ _____。

| **练习 7.6** 在 $\triangle ABC$ 中, $\sin A + \cos A > 0$, $\tan A - \sin A < 0$, 则角 A 的取值范围是 _____。

| **练习 7.7** 在 $\triangle ABC$ 中, 若 $\sin C = 2 \cos A \sin B$, 则三角形形状是 _____。

| **练习 7.8** 在 $\triangle ABC$ 中, $\tan A \cdot \tan B > 1$, 则 $\triangle ABC$ 为 _____ 角三角形。

练习 7.9 已知锐角 $\triangle ABC$ 的外心为 D ，过 A, B, D 三点作圆，分别与 AC, BC 相交于 M, N 两点。求证： $\triangle MNC$ 的外接圆半径等于 $\triangle ABD$ 的外接圆半径。

练习 7.10 在 $\triangle ABC$ 中， $a = 4$ ， $b + c = 5$ ， $\tan C + \tan B + \sqrt{3} = \sqrt{3} \tan C \tan B$ ，则 $\triangle ABC$ 的面积为 _____。

练习 7.11 在 $\triangle ABC$ 中，“三边 a, b, c 成等差数列”是“ $\tan \frac{A}{2} \cdot \tan \frac{C}{2} = \frac{1}{3}$ ”的 _____ 条件。

练习 7.12 三角形有一个角是 60° ，夹这个角的两边之比是 $8:5$ ，内切圆的面积是 12π ，求这个三角形的面积。

练习 7.13 已知 $\triangle ABC$ 中， $\sin C = \frac{\sin A + \sin B}{\cos A + \cos B}$ ，试判断其形状。

7.4 B 组

| 练习 7.14 在 $\triangle ABC$ 中,若 $\tan A = \frac{1}{2}, \tan B = \frac{1}{3}$,且最长边长为 1,则最短边长为_____。

| 练习 7.15 已知 $n \in \mathbb{N}_+$, 则以 3,5,n 为三边长的钝角三角形有_____个。

| 练习 7.16 若 A 为 $\triangle ABC$ 的内角, 比较大小: $\cot \frac{A}{8} - \cot A$ _____ 0。

| 练习 7.17 若 $\triangle ABC$ 满足 $a \cos A = b \cos B$, 则 $\triangle ABC$ 的形状为_____。

练习 7.18 满足 $A = 60^\circ$, $a = \sqrt{6}$, $b = 4$ 的三角形有 _____ 个。

练习 7.19 关于 θ 的方程 $a \cos^2 \frac{\theta}{2} + \sin^2 \frac{\theta}{2} - \cos^2 \frac{\theta}{2} - a \sin^2 \frac{\theta}{2} = a + 1$ 有解, 则 a 的取值范围是 _____。

7.5 C 组

练习 7.20 已知 $p, q \in \mathbb{R}^+$, $p + q = 1$, 比较大小: $p \sin^2 A + q \sin^2 B$ _____ $pq \sin^2 C$ 。

练习 7.21 在 $\triangle ABC$ 中, 若 $\sin 2A + \sin 2B + \sin 2C = 4 \sin A \sin B \sin C$, 则 $\triangle ABC$ 为 _____ 角三角形。

练习 7.22 A, B, C 是一段笔直公路上的三点, 分别在塔 D 的西南方向、正西方向、西偏北 30° 方向, 且 $AB = BC = 1$ km, 求塔与公路 AC 段的最近距离。

| 练习 7.23 求方程 $x\sqrt{y-1} + y\sqrt{x-1} = xy$ 的实数解。

| 练习 7.24 在 $\triangle ABC$ 中, $b^2 = ac$, 则 $\sin B + \cos B$ 的取值范围是 _____。

| 练习 7.25 在 $\triangle ABC$ 中, 若 $\frac{\sin B}{\sin C} = \frac{\cos A + 2\cos C}{\cos A + 2\cos B}$, 则 $\triangle ABC$ 的形状为 _____。

练习 7.26 在 $\triangle ABC$ 中, 若 $c-a$ 等于 AC 边上的高 h , 则 $\sin \frac{C-A}{2} + \cos \frac{A+C}{2} =$ _____。

练习 7.27 对任意的 $\triangle ABC$, $T \leq \cot \frac{A}{2} + \cot \frac{B}{2} + \cot \frac{C}{2} - (\cot A + \cot B + \cot C)$, 则 T 的最大值为 _____。

练习 7.28 在 $\triangle ABC$ 中, $\sin \frac{A}{2} \sin B \sin C$ 的最大值为 _____。

练习 7.29 在 $\triangle ABC$ 中, $A \geq B \geq C \geq \frac{\pi}{6}$, 则乘积 $\cos \frac{A}{2} \sin \frac{B}{2} \cos \frac{C}{2}$ 的最大值为 _____, 最小值为 _____。

练习 7.30 求证: $\frac{1}{3} < \sin 20^\circ < \frac{7}{20}$ 。

第八章 平面向量

8.1 基础知识

定义 8.1: 向量的定义 既有大小又有方向的量,称为向量。画图时用有向线段来表示,线段的长度表示向量的模。模为零的向量称为零向量,规定零向量的方向是任意的;模为 1 的向量称为单位向量。

定义 8.2: 平行向量 (共线向量) 方向相同或相反的向量称为平行向量 (或共线向量),规定零向量与任意一个非零向量平行,向量可以自由平移。

定理 8.1: 向量共线的充要条件 非零向量 $\mathbf{a}, \mathbf{b}$ 共线的充要条件是存在实数 $\lambda \neq 0$, 使得 $\mathbf{a} = \lambda \mathbf{b}$ 。

定理 8.2: 向量的运算法则 向量的加法满足平行四边形法则,减法满足三角形法则;加法和减法都满足交换律和结合律。

定理 8.3: 平面向量基本定理 若平面内的向量 $\boldsymbol{a}, \boldsymbol{b}$ 不共线, 则对同一平面内任意向量 $\boldsymbol{c}$, 存在唯一一对实数 x, y , 使得 $\boldsymbol{c} = x\boldsymbol{a} + y\boldsymbol{b}$, 其中 $\boldsymbol{a}, \boldsymbol{b}$ 称为平面内的一组基底。

定义 8.3: 向量的坐标 在直角坐标系中, 取与 x 轴、 y 轴方向相同的两个单位向量 $\boldsymbol{i}, \boldsymbol{j}$ 作为基底, 任取一个向量 $\boldsymbol{c}$, 由平面向量基本定理可知存在唯一一组实数 x, y , 使得 $\boldsymbol{c} = x\boldsymbol{i} + y\boldsymbol{j}$, 则 (x, y) 叫做向量 $\boldsymbol{c}$ 的坐标。

定义 8.4: 向量的数量积 若非零向量 $\boldsymbol{a}, \boldsymbol{b}$ 的夹角为 θ , 则 $\boldsymbol{a}, \boldsymbol{b}$ 的数量积记作 $\boldsymbol{a} \cdot \boldsymbol{b} = |\boldsymbol{a}| \cdot |\boldsymbol{b}| \cos \theta = |\boldsymbol{a}| \cdot |\boldsymbol{b}| \cos \langle \boldsymbol{a}, \boldsymbol{b} \rangle$, 也称内积, 其中 $|\boldsymbol{b}| \cos \theta$ 叫做 $\boldsymbol{b}$ 在 $\boldsymbol{a}$ 上的投影。

定理 8.4: 平面向量的坐标运算 若 $\mathbf{a} = (x_1, y_1)$, $\mathbf{b} = (x_2, y_2)$, 则有以下运算规则:

1. $\mathbf{a} + \mathbf{b} = (x_1 + x_2, y_1 + y_2)$, $\mathbf{a} - \mathbf{b} = (x_1 - x_2, y_1 - y_2)$;
2. $\lambda \mathbf{a} = (\lambda x_1, \lambda y_1)$, $\mathbf{a} \cdot (\mathbf{b} + \mathbf{c}) = \mathbf{a} \cdot \mathbf{b} + \mathbf{a} \cdot \mathbf{c}$;
3. $\mathbf{a} \cdot \mathbf{b} = x_1 x_2 + y_1 y_2$, $\cos \langle \mathbf{a}, \mathbf{b} \rangle = \frac{x_1 x_2 + y_1 y_2}{\sqrt{x_1^2 + y_1^2} \cdot \sqrt{x_2^2 + y_2^2}}$ ($\mathbf{a}, \mathbf{b} \neq \mathbf{0}$);
4. $\mathbf{a} \parallel \mathbf{b} \Leftrightarrow x_1 y_2 = x_2 y_1$, $\mathbf{a} \perp \mathbf{b} \Leftrightarrow x_1 x_2 + y_1 y_2 = 0$.

定义 8.5: 定比分点 若点 P 是直线 $P_1 P_2$ 上异于 P_1, P_2 的一点, 则存在唯一实数 λ , 使 $\overrightarrow{P_1 P} = \lambda \overrightarrow{P P_2}$, λ 叫做 P 分 $\overrightarrow{P_1 P_2}$ 所成的比。若 O 为平面内任意一点, 则 $\overrightarrow{OP} = \frac{\overrightarrow{OP_1} + \lambda \overrightarrow{OP_2}}{1 + \lambda}$; 若 P_1, P, P_2 的坐标分别为 (x_1, y_1) 、 (x, y) 、 (x_2, y_2) , 则定比分点坐标公式为:

$$\begin{cases} x = \frac{x_1 + \lambda x_2}{1 + \lambda} \\ y = \frac{y_1 + \lambda y_2}{1 + \lambda} \end{cases}, \quad \lambda = \frac{x - x_1}{x_2 - x} = \frac{y - y_1}{y_2 - y}$$

定理 8.5: 向量不等式 对于任意向量 $\mathbf{a} = (x_1, y_1)$, $\mathbf{b} = (x_2, y_2)$, 有 $|\mathbf{a} \cdot \mathbf{b}| \leq |\mathbf{a}| \cdot |\mathbf{b}|$, 并且 $|\mathbf{a} + \mathbf{b}| \leq |\mathbf{a}| + |\mathbf{b}|$ 。

推广 1 (柯西不等式): 对 n 维向量 $\mathbf{a} = (x_1, x_2, \dots, x_n)$, $\mathbf{b} = (y_1, y_2, \dots, y_n)$, 有

$$(x_1^2 + x_2^2 + \dots + x_n^2)(y_1^2 + y_2^2 + \dots + y_n^2) \geq (x_1 y_1 + x_2 y_2 + \dots + x_n y_n)^2$$

推广 2 (三角不等式): 对于任意 n 个向量 $\mathbf{a}_1, \mathbf{a}_2, \dots, \mathbf{a}_n$, 有

$$|\mathbf{a}_1 + \mathbf{a}_2 + \dots + \mathbf{a}_n| \leq |\mathbf{a}_1| + |\mathbf{a}_2| + \dots + |\mathbf{a}_n|$$

8.2 方法与例题

8.2.1 向量定义和运算法则的运用

例题 8.1 设 O 是正 n 边形 $A_1A_2\cdots A_n$ 的中心, 求证: $\overrightarrow{OA_1} + \overrightarrow{OA_2} + \cdots + \overrightarrow{OA_n} = \vec{0}$ 。

例题 8.2 给定 $\triangle ABC$, 求证: G 是 $\triangle ABC$ 重心的充要条件是 $\overrightarrow{GA} + \overrightarrow{GB} + \overrightarrow{GC} = \vec{0}$ 。

例题 8.3 在凸四边形 $ABCD$ 中, P 和 Q 分别为对角线 BD 和 AC 的中点, 求证:

$$AB^2 + BC^2 + CD^2 + DA^2 = AC^2 + BD^2 + 4PQ^2$$

8.2.2 证明共线

例题 8.4 $\triangle ABC$ 外心为 O , 垂心为 H , 重心为 G 。求证: O, G, H 共线, 且 $OG : GH = 1 : 2$ 。

例题 8.5 已知 $\triangle ABC$ 内接于 $\odot O$, $AB = AC$, D 为 AB 中点, E 为 $\triangle ACD$ 重心。求证: $OE \perp CD$ 。

8.2.3 向量的坐标运算

例题 8.6 已知四边形 $ABCD$ 是正方形, $BE \parallel AC$, $AC = CE$, EC 的延长线交 BA 的延长线于点 F , 求证: $AF = AE$ 。

8.3 A 组

练习 8.1 以下命题中正确的是_____。

- (1) $\mathbf{a} = \mathbf{b}$ 的充要条件是 $|\mathbf{a}| = |\mathbf{b}|$, 且 $\mathbf{a} \parallel \mathbf{b}$;
- (2) $(\mathbf{a} \cdot \mathbf{b}) \cdot \mathbf{c} = (\mathbf{a} \cdot \mathbf{c}) \cdot \mathbf{b}$;
- (3) 若 $\mathbf{a} \cdot \mathbf{b} = \mathbf{a} \cdot \mathbf{c}$, 则 $\mathbf{b} = \mathbf{c}$;
- (4) 若 $\mathbf{a}, \mathbf{b}$ 不共线, 则 $x\mathbf{a} + y\mathbf{b} = m\mathbf{a} + n\mathbf{b}$ 的充要条件是 $x = m, y = n$;
- (5) 若 $\overrightarrow{AB} = \mathbf{a}, \overrightarrow{CD} = \mathbf{b}$, 且 $\mathbf{a}, \mathbf{b}$ 共线, 则 A, B, C, D 共线;
- (6) $\mathbf{a} = (8, 1)$ 在 $\mathbf{b} = (-3, 4)$ 上的投影为 -4 。

练习 8.2 已知正六边形 $ABCDEF$, 在下列表达式中:

- (1) $\overrightarrow{BC} + \overrightarrow{CD} + \overrightarrow{EC}$;
- (2) $2\overrightarrow{BC} + \overrightarrow{DC}$;
- (3) $\overrightarrow{FE} + \overrightarrow{ED}$;
- (4) $2\overrightarrow{ED} - \overrightarrow{FA}$

与 $\overrightarrow{AC}$ 相等的有_____。

练习 8.3 设 s, t 为非零实数, $\mathbf{a}, \mathbf{b}$ 为单位向量, 若 $|s\mathbf{a} + t\mathbf{b}| = |t\mathbf{a} - s\mathbf{b}|$, 则 $\mathbf{a}$ 和 $\mathbf{b}$ 的夹角为_____。

练习 8.4 已知 $\mathbf{a}, \mathbf{b}$ 不共线, $\overrightarrow{MN} = \mathbf{a} + k\mathbf{b}, \overrightarrow{MP} = l\mathbf{a} + \mathbf{b}$, 则“ $kl - 1 = 0$ ”是“ M, N, P 共线”的_____条件。

练习 8.5 已知 $\overrightarrow{OA}, \overrightarrow{OB}$ 不共线, 点 C 分 $\overrightarrow{AB}$ 所成比为 $2:1$, $\overrightarrow{OC} = \lambda \overrightarrow{OA} + \mu \overrightarrow{OB}$, 则 $\lambda - \mu =$ _____。

练习 8.6 把函数 $y = 2x^2 - 4x + 5$ 的图象按向量 $\mathbf{a}$ 平移后得到 $y = 2x^2$ 的图象, $\mathbf{c} = (1, -1)$, 若 $\mathbf{a} \perp \mathbf{b}$, $\mathbf{c} \cdot \mathbf{b} = 4$, 则 $\mathbf{b}$ 的坐标为 _____。

练习 8.7 已知 $\overrightarrow{OA} = \mathbf{a}$, $\overrightarrow{OB} = \mathbf{b}$, $\mathbf{a} \cdot \mathbf{b} = |\mathbf{a} - \mathbf{b}| = 2$, 当 $\triangle AOB$ 面积最大时, $\mathbf{a}$ 与 $\mathbf{b}$ 的夹角为 _____。

练习 8.8 在 $Rt\triangle BAC$ 中, 已知 $BC = a$, 若长为 $2a$ 的线段 PQ 以点 A 为中点, 试问 $\overrightarrow{PQ}$ 与 $\overrightarrow{BC}$ 的夹角 θ 取何值时 $\overrightarrow{BP} \cdot \overrightarrow{CQ}$ 的值最大? 并求出这个最大值。

练习 8.9 在四边形 $ABCD$ 中, $\overrightarrow{AB} = \mathbf{a}$, $\overrightarrow{BC} = \mathbf{b}$, $\overrightarrow{CD} = \mathbf{c}$, $\overrightarrow{DA} = \mathbf{d}$, 如果 $\mathbf{a} \cdot \mathbf{b} = \mathbf{b} \cdot \mathbf{c} = \mathbf{c} \cdot \mathbf{d} = \mathbf{d} \cdot \mathbf{a}$, 试判断四边形 $ABCD$ 的形状。

8.4 B 组

练习 8.10 在 $\triangle ABC$ 中, $\overrightarrow{AB} = \mathbf{a}$, $\overrightarrow{BC} = \mathbf{b}$, 且 $\mathbf{a} \cdot \mathbf{b} < 0$, 则 $\triangle ABC$ 的形状是_____。

练习 8.11 若 O 为 $\triangle ABC$ 的内心, 且 $(\overrightarrow{OB} - \overrightarrow{OC}) \cdot (\overrightarrow{OB} + \overrightarrow{OC} - 2\overrightarrow{OA}) = 0$, 则 $\triangle ABC$ 的形状为_____。

练习 8.12 设 O 点在 $\triangle ABC$ 内部, 且 $\overrightarrow{OA} + 2\overrightarrow{OB} + 3\overrightarrow{OC} = \vec{0}$, 则 $\triangle AOB$ 与 $\triangle AOC$ 的面积比为_____。

练习 8.13 P 是 $\triangle ABC$ 所在平面上一点, 若 $\overrightarrow{PA} \cdot \overrightarrow{PB} = \overrightarrow{PB} \cdot \overrightarrow{PC} = \overrightarrow{PC} \cdot \overrightarrow{PA}$, 则 P 是 $\triangle ABC$ 的_____心。

练习 8.14 已知 $\overrightarrow{OP} = (\cos \theta, \sin \theta)$, $\overrightarrow{OQ} = (1 + \sin \theta, 1 + \cos \theta)$ ($\theta \in [0, \pi]$), 则 $|\overrightarrow{PQ}|$ 的取值范围是_____。

| 练习 8.15 已知 $\mathbf{a} = (2, 1)$, $\mathbf{b} = (\lambda, 1)$, 若 $\mathbf{a}$ 与 $\mathbf{b}$ 的夹角为锐角, 则 λ 的取值范围是 _____。

| 练习 8.16 在 $\triangle ABC$ 中, O 为中线 AM 上的一个动点, 若 $AM = 2$, 则 $\overrightarrow{OA} \cdot (\overrightarrow{OB} + \overrightarrow{OC})$ 的最小值为 _____。

| 练习 8.17 已知集合 $M = \{\mathbf{a} \mid \mathbf{a} = (1, 2) + \lambda(3, 4), \lambda \in \mathbb{R}\}$, 集合 $N = \{\mathbf{a} \mid \mathbf{a} = (-2, -2) + \lambda(4, 5), \lambda \in \mathbb{R}\}$, 则 $M \cap N =$ _____。

| 练习 8.18 已知平面上三个向量 $\mathbf{a}, \mathbf{b}, \mathbf{c}$ 均为单位向量, 且两两的夹角均为 120° , 若 $|k\mathbf{a} + \mathbf{b} + \mathbf{c}| > 1$ ($k \in \mathbb{R}$), 则 k 的取值范围是 _____。

| 练习 8.19 对于非零向量 $\mathbf{a}, \mathbf{b}$, “ $|\mathbf{a}| = |\mathbf{b}|$ ” 是 “ $(\mathbf{a} + \mathbf{b}) \perp (\mathbf{a} - \mathbf{b})$ ” 的 _____ 条件。

8.5 C 组

练习 8.20 已知 $\mathbf{a} = \mathbf{y} - \mathbf{x}$, $\mathbf{b} = 2\mathbf{x} - \mathbf{y}$, $|\mathbf{a}| = |\mathbf{b}| = 1$, $\mathbf{a} \cdot \mathbf{b} = 0$, 则 $|\mathbf{x}| + |\mathbf{y}| =$ _____。

练习 8.21 在 $\triangle ABC$ 中, M 是 AC 中点, N 是 AB 的三等分点, 且 $\overrightarrow{BN} = 2\overrightarrow{NA}$, BM 与 CN 交于 D , 若 $\overrightarrow{BD} = \lambda \overrightarrow{BM}$, 则 $\lambda =$ _____。

练习 8.22 将向量 $\mathbf{a} = (2, 1)$ 绕原点按逆时针方向旋转 $\frac{\pi}{4}$ 得到向量 $\mathbf{b}$, 则 $\mathbf{b}$ 的坐标为 _____。

练习 8.23 非零向量 $\overrightarrow{OA} = \mathbf{a}$, $\overrightarrow{OB} = \mathbf{b}$, 若点 B 关于 $\overrightarrow{OA}$ 所在直线对称的点为 B_1 , 则 $\overrightarrow{OB_1} =$ _____。

练习 8.24 已知 P 为 $\triangle ABC$ 内一点, 且 $\overrightarrow{PA} + 2\overrightarrow{PB} + 3\overrightarrow{PC} = \vec{0}$, CP 交 AB 于 D , 求证: $\overrightarrow{DP} = \overrightarrow{PC}$ 。

练习 8.25 P 为 $\triangle ABC$ 内心, 角 A, B, C 所对边长分别为 a, b, c , O 为平面内任意一点, $\overrightarrow{OA} = \boldsymbol{x}$, $\overrightarrow{OB} = \boldsymbol{y}$, $\overrightarrow{OC} = \boldsymbol{z}$, 则 $\overrightarrow{OP} =$ _____ (用 $a, b, c, \boldsymbol{x}, \boldsymbol{y}, \boldsymbol{z}$ 表示)。

练习 8.26 O 为 $\triangle ABC$ 所在平面内一点, A, B, C 为 $\triangle ABC$ 的角, 若 $\sin A \cdot \overrightarrow{OA} + \sin B \cdot \overrightarrow{OB} + \sin C \cdot \overrightarrow{OC} = \vec{0}$, 则点 O 为 $\triangle ABC$ 的 _____ 心。

练习 8.27 点 O 是平面上一定点, A, B, C 是此平面上不共线的三个点, 动点 P 满足 $\overrightarrow{OP} = \overrightarrow{OA} + \lambda \left(\frac{\overrightarrow{AB}}{|\overrightarrow{AB}|} + \frac{\overrightarrow{AC}}{|\overrightarrow{AC}|} \right)$, $\lambda \in [0, +\infty)$, 则点 P 的轨迹一定通过 $\triangle ABC$ 的 _____ 心。

练习 8.28 设 G 为 $\triangle ABO$ 的重心, 过 G 的直线与边 OA 和 OB 分别交于 P 和 Q , 已知 $\overrightarrow{OP} = x\overrightarrow{OA}$, $\overrightarrow{OQ} = y\overrightarrow{OB}$, $\triangle OAB$ 与 $\triangle OPQ$ 的面积分别为 S 和 T 。(1) 求 $y = f(x)$ 的解析式及定义域; (2) 求 $\frac{T}{S}$ 的取值范围。

练习 8.29 已知两点 $M(-1, 0)$, $N(1, 0)$, 有一点 P 使得 $\overrightarrow{MP} \cdot \overrightarrow{MN}$, $\overrightarrow{PM} \cdot \overrightarrow{PN}$, $\overrightarrow{NM} \cdot \overrightarrow{NP}$ 成公差小于零的等差数列。(1) 试问点 P 的轨迹是什么? (2) 若点 P 坐标为 (x_0, y_0) , θ 为 $\overrightarrow{PM}$ 与 $\overrightarrow{PN}$ 的夹角, 求 $\tan \theta$ 。

练习 8.30 平面内四点 A, B, C, D 满足 $|\overrightarrow{AB}| = 3$, $|\overrightarrow{BC}| = 7$, $|\overrightarrow{CD}| = 11$, $|\overrightarrow{DA}| = 9$, 则 $\overrightarrow{AC} \cdot \overrightarrow{BD}$ 的取值有 _____ 个。

练习 8.31 已知 $A_1A_2A_3A_4A_5$ 是半径为 r 的 $\odot O$ 内接正五边形, P 为 $\odot O$ 上任意一点, 则 $|\overrightarrow{PA_1}|^2 + |\overrightarrow{PA_2}|^2 + |\overrightarrow{PA_3}|^2 + |\overrightarrow{PA_4}|^2 + |\overrightarrow{PA_5}|^2$ 取值的集合是 _____。

练习 8.32 在 $\triangle ABC$ 中, $\overrightarrow{AB} = \mathbf{a}$, $\overrightarrow{BC} = \mathbf{c}$, $\overrightarrow{CA} = \mathbf{b}$, 又 $(\mathbf{c} \cdot \mathbf{b}) : (\mathbf{b} \cdot \mathbf{a}) : (\mathbf{a} \cdot \mathbf{c}) = 1 : 2 : 3$, 则 $\triangle ABC$ 三边长之比 $|\mathbf{a}| : |\mathbf{b}| : |\mathbf{c}| =$ _____。

练习 8.33 在矩形 $ABCD$ 的外接圆的弧 $\widehat{AB}$ 上取一个不同于顶点 A, B 的点 M , 点 P, Q, R, S 是 M 分别在直线 AD, AB, BC, CD 上的射影, 求证: 直线 PQ 与 RS 互相垂直。

练习 8.34 已知 AC, CE 是正六边形 $ABCDEF$ 的两条对角线, 点 M, N 分别内分 AC, CE , 使得 $AM : AC = CN : CE = r$, 如果 B, M, N 三点共线, 求 r 。

练习 8.35 已知 A, B 为两条定直线 AX, BY 上的定点, P 和 R 为射线 AX 上两点, Q 和 S 为射线 BY 上的两点, $\frac{AP}{BQ} = \frac{AR}{BS}$ 为定比, M, N, T 分别为线段 AB, PQ, RS 上的点, $\frac{AM}{MB} = \frac{PN}{NQ} = \frac{RT}{TS}$ 为另一定比, 试问 M, N, T 三点的位置关系如何? 证明你的结论。

8.6 D 组

练习 8.36 已知 $\triangle ABC$ 的垂心为 H 。三角形

$$\triangle HBC, \triangle HCA, \triangle HAB$$

的外心分别为 O_1, O_2, O_3 。令

$$\overrightarrow{HA} = \mathbf{a}, \quad \overrightarrow{HB} = \mathbf{b}, \quad \overrightarrow{HC} = \mathbf{c}, \quad \overrightarrow{HO_1} = \mathbf{p},$$

求证: (1) $2\mathbf{p} = \mathbf{b} + \mathbf{c} - \mathbf{a}$; (2) H 为 $\triangle O_1O_2O_3$ 的外心。

练习 8.37 设坐标平面上全部向量的集合为 V , $\mathbf{a} = (a_1, a_2)$ 为 V 中的一个单位向量, 已知从 V 到 V 的变换 T , 由 $T(\mathbf{x}) = -\mathbf{x} + 2(\mathbf{x} \cdot \mathbf{a})\mathbf{a}$ ($\mathbf{x} \in V$) 确定。(1) 对于 V 的任意两个向量 $\mathbf{x}, \mathbf{y}$, 求证: $T(\mathbf{x}) \cdot T(\mathbf{y}) = \mathbf{x} \cdot \mathbf{y}$; (2) 对于 V 的任意向量 $\mathbf{x}$, 计算 $T[T(\mathbf{x})] - \mathbf{x}$; (3) 设 $\mathbf{u} = (1, 0)$, $\mathbf{v} = (0, 1)$, 若 $T(\mathbf{u}) = \mathbf{v}$, 求 $\mathbf{a}$ 。

练习 8.38 在 $\triangle ABC$ 内, 设 D 及 E 是 BC 的三等分点, D 在 B 和 E 之间, F 是 AC 的中点, G 是 AB 的中点, 又设 H 是线段 EG 和 DF 的交点, 求比值 $EH : HG$ 。

练习 8.39 是否存在四个平面向量, 两两不共线, 其中任何两个向量之和均与其余两个向量之和垂直?

练习 8.40 平面上两个正三角形 $\triangle A_1B_1C_1$ 和 $\triangle A_2B_2C_2$, 字母排列顺序一致, 过平面上一点 O 作 $\overrightarrow{OA} = \overrightarrow{A_1A_2}$, $\overrightarrow{OB} = \overrightarrow{B_1B_2}$, $\overrightarrow{OC} = \overrightarrow{C_1C_2}$, 求证: $\triangle ABC$ 为正三角形。

练习 8.41 已知点 O 在凸多边形 $A_1A_2 \cdots A_n$ 内, 考虑所有的 $\angle A_iOA_j$, 这里的 i, j 为 1 至 n 中不同的自然数, 求证: 其中至少有 $n-1$ 个不是锐角。

练习 8.42 如图, 在 $\triangle ABC$ 中, O 为外心, 三条高 AD, BE, CF 交于点 H , 直线 ED 和 AB 交于点 M , FD 和 AC 交于点 N , 求证: (1) $OB \perp DF$, $OC \perp DE$; (2) $OH \perp MN$ 。

练习 8.43 在平面上给出和为 $\vec{0}$ 的向量 $\mathbf{a}, \mathbf{b}, \mathbf{c}, \mathbf{d}$, 任何两个不共线, 求证:

$$|\mathbf{a}| + |\mathbf{b}| + |\mathbf{c}| + |\mathbf{d}| \geq |\mathbf{a} + \mathbf{d}| + |\mathbf{b} + \mathbf{d}| + |\mathbf{c} + \mathbf{d}|.$$

第九章 复数

9.1 基础知识

定义 9.1: 复数的定义 设 i 为方程 $x^2 = -1$ 的根 (i 称为虚数单位), 由 i 与实数进行加、减、乘、除等运算, 产生形如 $a + bi$ ($a, b \in \mathbb{R}$) 的数, 称为复数. 所有复数构成的集合称为复数集, 通常用 $\mathbb{C}$ 表示.

9.1.1 复平面上的对应

对复数 $z = a + bi$ ($a, b \in \mathbb{R}$), 都可以由一个有序实数对 (a, b) 唯一确定, 即 $z = a + bi$ 对应复平面上的点 $Z(a, b)$, 同时亦和 $\overrightarrow{OZ} = (a, b)$ 一一对应。

所以我们常把复数 $z = a + bi$ 说成点 $Z(a, b)$ 或说成向量 $\overrightarrow{OZ} = (a, b)$, 它们分别是复数的代数形式、几何形式、向量形式。

定义 9.2: 复数的表示形式

1. 代数形式: $z = a + bi$, 其中 a 称为实部 (记作 $Re(z)$), b 称为虚部 (记作 $Im(z)$);
2. 几何形式: 将 (a, b) 作为坐标平面内点的坐标, 复数集与坐标平面内所有点构成一一映射, 该平面称为复平面 (x 轴为实轴, y 轴去掉原点为虚轴);
3. 向量形式: 将 (a, b) 作为向量的坐标, 复数与坐标平面内的向量一一对应。

定理 9.1: 复数的运算法则

1. **代数形式:** 加、减、乘、除运算法则与实数一致, 除法可通过乘以共轭复数将分母化为实数, 即 $\frac{a+bi}{c+di} = \frac{(a+bi)(c-di)}{c^2+d^2} \ (c+di \neq 0)$;
2. **向量形式:** 加法满足平行四边形法则, 减法满足三角形法则;

9.1.2 复数的模

定义 9.3: 复数的模 向量 $\vec{OZ} = (a, b)$ 的模叫做复数 $z = a+bi$ 的模, 记作 $|z|$. 显然, $|a+bi| = \sqrt{a^2+b^2}$.

定理 9.2: 模的性质 设 $z, z_1, z_2 \in \mathbb{C}$, $\bar{z} = a-bi$ 为 $z = a+bi$ 的共轭复数, 则:

1. $|z_1 \cdot z_2| = |z_1| \cdot |z_2|$;
2. $\left| \frac{z_1}{z_2} \right| = \frac{|z_1|}{|z_2|} \ (z_2 \neq 0)$;
3. $|z^n| = |z|^n$;
4. $||z_1| - |z_2|| \leq |z_1 \pm z_2| \leq |z_1| + |z_2|$;
5. $|z_1 + z_2|^2 + |z_1 - z_2|^2 = 2|z_1|^2 + 2|z_2|^2$.

9.1.3 共轭复数

定义 9.4: 共轭复数 当两个复数的实部相等, 且虚部互为相反数时, 称它们互为共轭复数, 即 $a+bi$ 与 $a-bi$ ($a, b \in \mathbf{R}$) 互为共轭复数. 互相共轭的两个复数在复平面上对应的点关于实轴对称. 复数 z 的共轭复数记做 $\bar{z}$. 共轭复数具有如下重要性质:

1. $|\bar{z}| = |z|$;
2. $z \cdot \bar{z} = |z|^2$;
3. $\frac{z_1}{z_2} = \frac{z_1 \cdot \bar{z}_2}{|z_2|^2}$;
4. $z + \bar{z} = 2\operatorname{Re}(z), z - \bar{z} = 2\operatorname{Im}(z)i$

特别地, 如果 $z = 1$, 那么 $z\bar{z} = 1, \bar{z} = \frac{1}{z}$.

定理 9.3: 共轭的四则运算性质 设 $z, z_1, z_2 \in \mathbb{C}$, $\bar{z} = a - bi$ 为 $z = a + bi$ 的共轭复数, 则:

1. $\overline{z_1 \pm z_2} = \bar{z}_1 \pm \bar{z}_2$;
2. $\overline{z_1 \cdot z_2} = \bar{z}_1 \cdot \bar{z}_2$;
3. $\overline{\left(\frac{z_1}{z_2}\right)} = \frac{\bar{z}_1}{\bar{z}_2} \quad (z_2 \neq 0)$;
4. $\bar{z}^n = \overline{z^n}$.

定理 9.4: 复数相等与特殊复数的充要条件

1. 复数相等: $a+bi = c+di$ ($a, b, c, d \in \mathbf{R}$) 的充要条件是 $a = c$ 且 $b = d$; 或模相等且辐角主值相等;
2. 实数充要条件: z 为实数 $\Leftrightarrow z = \bar{z}$;
3. 纯虚数充要条件: z 为纯虚数 $\Leftrightarrow z + \bar{z} = 0$ 且 $z \neq 0$.

9.1.4 复数的三角形式

定义 9.5: 复数的三角形式 设 $z = a + bi$ 是非零复数, 对应点复平面的点 $Z(a, b)$, 连接 OZ , 满足 $|OZ| = r$, 射线 OZ 恰是角 θ 的终边。

则 $a = r \cos \theta$, $b = r \sin \theta$, 故 $z = r(\cos \theta + i \sin \theta)$, 这种形式称为复数的三角形式。

其中, θ 称为 z 的辐角, 记作 $\text{Arg}(z)$. 若 $0 \leq \theta < 2\pi$, 则 θ 称为 z 的辐角主值, 记作 $\arg(z)$.

定理 9.5: 三角形式的乘除运算 复数三角形式的乘除运算法则符合和差角公式。

设 $z_1 = r_1(\cos \theta_1 + i \sin \theta_1)$, $z_2 = r_2(\cos \theta_2 + i \sin \theta_2)$, 则:

$$z_1 \cdot z_2 = r_1 r_2 [\cos(\theta_1 + \theta_2) + i \sin(\theta_1 + \theta_2)],$$

$$\frac{z_1}{z_2} = \frac{r_1}{r_2} [\cos(\theta_1 - \theta_2) + i \sin(\theta_1 - \theta_2)]. \quad (z_2 \neq 0)$$

定理 9.6: 棣莫弗定理 对复数 $z = r(\cos \theta + i \sin \theta)$ 及正整数 n , 有:

$$[r(\cos \theta + i \sin \theta)]^n = r^n (\cos n\theta + i \sin n\theta).$$

定理 9.7: 复数的开方 若 $w^n = r(\cos \theta + i \sin \theta)$, 则 w 的 n 个 n 次方根为:

$$w = \sqrt[n]{r} \left(\cos \frac{\theta + 2k\pi}{n} + i \sin \frac{\theta + 2k\pi}{n} \right) \quad (k = 0, 1, 2, \dots, n-1)$$

9.1.5 复数乘除法的几何意义

设复数 $z_1 = r_1 (\cos \theta_1 + i \sin \theta_1)$ 对应的向量 $\overrightarrow{OZ_1}$, 同时设 $z_2 = r_2 (\cos \theta_2 + i \sin \theta_2)$, 由

$$z_1 \cdot z_2 = r_1 (\cos \theta_1 + i \sin \theta_1) \cdot r_2 (\cos \theta_2 + i \sin \theta_2) = r_1 r_2 (\cos (\theta_1 + \theta_2) + i \sin (\theta_1 + \theta_2)).$$

可知, 把向量 $\overrightarrow{OZ_1}$ 绕点 O 逆时针方向旋转角 θ_2 ; 再把 $\overrightarrow{OZ_1}$ 的模换成 $r_2 \cdot |\overrightarrow{OZ_1}|$, 即得积 $z_1 \cdot z_2$ 对应的向量 $\overrightarrow{OZ}$.

同样的, 由

$$\frac{z_1}{z_2} = \frac{r_1 (\cos \theta_1 + i \sin \theta_1)}{r_2 (\cos \theta_2 + i \sin \theta_2)} = \frac{r_1}{r_2} (\cos (\theta_1 - \theta_2) + i \sin (\theta_1 - \theta_2))$$

可知, 把向量 $\overrightarrow{OZ_1}$ 绕点 O 顺时针方向旋转角 θ_2 ; 再把 $\overrightarrow{OZ_1}$ 的模换成 $\frac{1}{r_2} \cdot |\overrightarrow{OZ_1}|$, 即得商 $\frac{z_1}{z_2}$ 对应的向量 $\overrightarrow{OZ}$.

因此, 复数的乘除法事实上是伸缩运算和旋转运算的复合.

9.1.6 复数的指数形式

定义 9.6: 欧拉公式

$$\begin{aligned} e^{i\theta} &= \cos \theta + i \sin \theta, \\ \cos \theta &= \frac{e^{i\theta} + e^{-i\theta}}{2}, \\ \sin \theta &= \frac{e^{i\theta} - e^{-i\theta}}{2i}. \end{aligned}$$

定义 9.7: 复数的指数形式 若用 $e^{i\theta}$ 表示 $\cos \theta + i \sin \theta$, 则 $z = r e^{i\theta}$, 其中 $r = |z|$, $\theta = \arg(z)$.

定义 9.8: 指数形式的运算法则 复数指数形式的运算与指数运算相同, 即

$$\begin{aligned} z_1 z_2 &= r_1 r_2 e^{i(\theta_1 + \theta_2)}, \\ \frac{z_1}{z_2} &= \frac{r_1}{r_2} e^{i(\theta_1 - \theta_2)} \quad (z_2 \neq 0). \end{aligned}$$

9.1.7 代数基本定理

定理 9.8: 代数基本定理 在复数范围内, 任何一个复系数多项式方程至少有一个根。

推论 9.1 在复数范围内, 任何一个复系数多项式必能分解成若干个一次因式的乘积, 且韦达定理中根与系数关系对复系数多项式方程依然成立。

定理 9.9: 实系数方程虚根成对定理 实系数一元 n 次方程的虚根成对出现, 即若 $z = a + bi$ ($b \neq 0$) 是方程的根, 则 $\bar{z} = a - bi$ 也是该方程的根。

特别地, 若 $a, b, c \in \mathbb{R}$, $a \neq 0$, 方程 $ax^2 + bx + c = 0$ 当 $\Delta = b^2 - 4ac < 0$ 时, 共轭复根为 $x_{1,2} = \frac{-b \pm \sqrt{|\Delta|}i}{2a}$ 。

推论 9.2 在实数范围内, 任何一个实系数多项式必能分解成若干个一次因式或二次因式的乘积。

9.1.8 单位根

定义 9.9: 单位根及其性质 若 $\omega^n = 1$, 则称 ω 为 1 的 n 次单位根 (简称单位根). 则

$$w_k = \cos \frac{2k\pi}{n} + i \sin \frac{2k\pi}{n}, (k = 0, 1, 2, \dots, n-1)$$

称为一个 n 次单位根.

进一步地, 如果不存在正整数 $m < n$, 使 w 是一个 m 次单位根, 则 w 称为一个 n 次本原单位根.

定理 9.10: n 次单位根的性质 记 $w_k = \cos \frac{2k\pi}{n} + i \sin \frac{2k\pi}{n} (k = 0, 1, 2, \dots, n-1)$, 则 w_k 有以下常用性质:

1. $(w_k)^n = 1, w_k = (w_1)^k, |w_k| = 1 (k = 0, 1, 2, \dots, n-1)$;
2. 当 $n \geq 2$ 时, $\sum_{k=0}^{n-1} w_k^m = \begin{cases} n, & n \mid m \\ 0, & n \nmid m \end{cases}$, 特别地, $1 + w_1 + w_2 + \dots + w_{n-1} = 0$;
3. $\sum_{k=0}^{n-1} x^k = \prod_{k=1}^{n-1} (x - w_k)$, 特别地, 当 $x = 1$ 时, $n = \prod_{k=1}^{n-1} (1 - w_k)$
4. $\{w_k\}$ 对于乘法、除法是封闭的. 也就是说, 方程 $x^n - 1 = 0$ 的若干个根的乘积也是这个方程的根; 这个方程的两个根的商也是这个方程的根.
5. w_k 表示复平面上单位圆周的 n 等分点 (或单位圆的内接正 n 边形的顶点), 其中 $w_0 = 1$ 是单位圆与正实轴的交点.

9.2 方法与例题

9.2.1 模的应用

例题 9.1 求证: 当 $n \in \mathbb{N}_+$ 时, 方程 $(z+1)^{2n} + (z-1)^{2n} = 0$ 只有纯虚根.

例题 9.2 设 $f(z) = z^2 + az + b$, a, b 为复数, 对一切 $|z| = 1$, 有 $|f(z)| = 1$, 求 a, b 的值.

9.2.2 复数相等

例题 9.3 设 $\lambda \in \mathbb{R}$, 若二次方程 $(1-i)x^2 + (\lambda+i)x + 1 + \lambda i = 0$ 有两个虚根, 求 λ 满足的充要条件.

9.2.3 三角形式的应用

例题 9.4 设 $n \leq 2000$, $n \in \mathbb{N}$, 且存在 θ 满足 $(\sin \theta + i \cos \theta)^n = \sin n\theta + i \cos n\theta$, 那么这样的 n 有多少个?

9.2.4 复数与三角

例题 9.5 已知 $\cos \alpha + \cos \beta + \cos \gamma = \sin \alpha + \sin \beta + \sin \gamma = 0$, 求证: $\cos 2\alpha + \cos 2\beta + \cos 2\gamma = 0$.

例题 9.6 求和: $S = \cos 20^\circ + 2 \cos 40^\circ + \cdots + 18 \cos(18 \times 20^\circ)$.

9.2.5 单位根的应用

例题 9.7 证明：自 $\odot O$ 上任意一点 P 到正多边形 $A_1 A_2 \cdots A_n$ 各个顶点的距离的平方和为定值.

例题 9.8 平面上给定 $\triangle A_1 A_2 A_3$ 及点 P_0 , 定义 $A_s = A_{s-3}$ ($s \geq 4$), 构造点列 $P_0, P_1, P_2, \cdots$, 使得 P_{k+1} 为绕中心 A_{k+1} 顺时针旋转 120° 时 P_k 所到达的位置 ($k = 0, 1, 2, \cdots$), 若 $P_{1986} = P_0$, 证明: $\triangle A_1 A_2 A_3$ 为等边三角形.

9.2.6 复数与多项式

例题 9.9 已知 $f(z) = c_0 z^n + c_1 z^{n-1} + \cdots + c_{n-1} z + c_n$ 是一个 n 次复系数多项式 ($c_0 \neq 0$), 求证: 一定存在一个复数 z_0 , $|z_0| \leq 1$, 并且 $|f(z_0)| \geq |c_0| + |c_n|$.

9.3 A 组

| 练习 9.1 满足 $(2x^2 + 5x + 2) + (y^2 - y - 2)i = 0$ 的有序实数对 (x, y) 有多少组?

| 练习 9.2 若 $a, b, c \in \mathbb{C}$, 则 $a^2 + b^2 > c^2$ 是 $a^2 + b^2 - c^2 > 0$ 成立的什么条件 (充分/必要/充要)?

| 练习 9.3 复数 z 满足 $|z| = 5$ 且 $(3 + 4i) \cdot z$ 是纯虚数, 则 $\bar{z} = ?$

| 练习 9.4 若 $z \in \mathbb{C}$ 且 $z^2 = 8 + 6i$, 则 $z^3 - 16z - \frac{100}{z} = ?$

练习 9.5 已知 $z = -\frac{2}{1+\sqrt{3}i}$, 则 $1+z+z^2+\cdots+z^{1992}=?$

练习 9.6 设复数 z 使得 $\frac{z+1}{z+2}$ 的一个辐角的绝对值为 $\frac{\pi}{6}$, 则 z 辐角主值的取值范围是?

练习 9.7 设 $z, w, \lambda \in \mathbb{C}$, $|\lambda| \neq 1$, 则关于 z 的方程 $\bar{z} - \lambda z = w$ 的解为 $z=?$

练习 9.8 设 $0 < x < 1$, 则 $2 \arctan \frac{1+x}{1-x} + \arcsin \frac{1-x^2}{1+x^2}=?$

练习 9.9 若 α, β 是方程 $ax^2 + bx + c = 0$ ($a, b, c \in \mathbb{R}$) 的两个虚根且 $\frac{\alpha^2}{\beta} \in \mathbb{R}$, 则 $\frac{\alpha}{\beta} = ?$

练习 9.10 已知关于 x 的实系数方程 $x^2 - 2x + 2 = 0$ 和 $x^2 + 2mx + 1 = 0$ 的四个不同的根在复平面上对应的点共圆, 则 m 取值的集合是?

练习 9.11 复平面上定点 Z_0 、动点 Z_1 对应的复数分别为 z_0, z_1 ($z_0 \neq 0$), 且满足方程 $|z_1 - z_0| = |z_1|$; 另一个动点 Z 对应的复数 z 满足 $z_1 \cdot z = -1$, 求点 z 的轨迹, 并指出它在复平面上的形状和位置.

9.4 B 组

练习 9.12 已知 $z \in \mathbb{C}$, 则命题 “ z 是纯虚数” 是命题 “ $\frac{z^2}{1-z^2} \in \mathbb{R}$ ” 的什么条件 (充分不必要/必要不充分/充要)?

练习 9.13 复数 z 和 $\cos \theta + i \sin \theta$ 对应的点关于直线 $|iz + 1| = |z + i|$ 对称, 则 $z = ?$

练习 9.14 设复数 z 满足 $z + |z| = 2 + i$, 那么 $z = ?$

练习 9.15 若 $z = \frac{(4-3i)^2(-1+\sqrt{3}i)^{10}}{(1-i)^{12}}$, 则 $|z| = ?$

练习 9.16 设复数 z_1, z_2 满足 $z_1 \cdot \bar{z}_2 + \bar{A}z_1 + Az_2 = 0$ (其中 $A \neq 0, A \in \mathbb{C}$), 证明: (1) $|z_1 + A| \cdot |z_2 + A| = |A|^2$; (2) $\frac{z_1 + A}{z_2 + A} = \left| \frac{z_1 + A}{z_2 + A} \right|$.

练习 9.17 若 $n \in \mathbb{N}$ 且 $n \geq 3$, 则方程 $z^{n+1} + z^n - 1 = 0$ 的模为 1 的虚根的个数为?

练习 9.18 若 $z \in \mathbb{C}$ 且 $|z| = 1$, $u = z^4 - z^3 - 3z^2i - z + 1$, 求 $|u|$ 的最大值和最小值, 并求取得最大值、最小值时的复数 z .

练习 9.19 有一个人在草原上漫步, 开始时从 O 出发, 向东行走, 每走 1 千米后, 便向左转 $\frac{\pi}{6}$ 角度, 他走过 n 千米后, 首次回到原出发点, 则 $n = ?$

9.5 C 组

练习 9.20 已知 $(\sqrt{3} + i)^m = (1 + i)^n$ ($m, n \in \mathbb{N}_+$), 则 mn 的最小值是?

练习 9.21 已知复数 z_1, z_2 满足 $\frac{z_2}{z_1} = \frac{\bar{z}_1}{\bar{z}_2}$, 且 $\text{Arg} z_1 = \frac{\pi}{3}$, $\text{Arg} z_2 = \frac{\pi}{6}$, $\text{Arg} z_3 = \frac{7\pi}{8}$, 求 $\text{Arg} \frac{z_1 + z_2}{z_3}$ 的值.

练习 9.22 已知复数 z 满足 $|2z + \frac{1}{z}| = 1$, 则 z 的辐角主值的取值范围是?

练习 9.23 对于适合 $|z| \leq 1$ 的每一个复数 z , 要使 $0 < |\alpha z + \beta| < 2$ 总能成立, 试问: 复数 α, β 应满足什么条件?

练习 9.24 已知复数 z 满足 $|z| = 1$, 则 $|z + iz + 1|$ 的最小值为?

练习 9.25 复平面上, 非零复数 z_1, z_2 在以 i 为圆心、1 为半径的圆上, $\bar{z}_1 \cdot z_2$ 的实部为零, z_1 的辐角主值为 $\frac{\pi}{6}$, 则 $z_2 = ?$

练习 9.26 设复平面上单位圆内接正 20 边形的 20 个顶点所对应的复数依次为

$$z_1, z_2, \dots, z_{20}.$$

则复数 $z_1^{1995}, z_2^{1995}, \dots, z_{20}^{1995}$ 所对应的不同点的个数是?

练习 9.27 当 $n \in \mathbb{N}$ 且 $1 \leq n \leq 100$ 时, $\left[\left(\frac{\sqrt{3}+i}{2} \right)^7 + 1 \right]^n$ 的值中有多少个实数?

练习 9.28 集合 $A = \{z \mid z^{18} = 1\}$, $B = \{w \mid w^{48} = 1\}$, $C = \{zw \mid z \in A, w \in B\}$, 问: 集合 C 中有多少个不同的元素?

练习 9.29 证明: 如果复数 A 的模为 1, 那么方程 $\left(\frac{1+ix}{1-ix}\right)^n = A$ 的所有根都是不相等的实根 ($n \in \mathbb{N}_+$).

练习 9.30 已知 z_1, z_2, z_3 满足 $\begin{cases} |z_1| = |z_2| = |z_3| = 1 \\ \frac{z_1}{z_2} + \frac{z_2}{z_3} + \frac{z_3}{z_1} = 1 \end{cases}$, 求 $|az_1 + bz_2 + cz_3|$ 的值 (a, b, c 为实常数).

9.6 D 组

练习 9.31 求证: $\sin \frac{\pi}{n} \cdot \sin \frac{2\pi}{n} \cdots \sin \frac{(n-1)\pi}{n} = \frac{n}{2^{n-1}} \ (n \geq 2)$.

练习 9.32 已知复数 z 满足 $11z^{10} + 10iz^9 + 10iz - 11 = 0$, 求证: $|z| = 1$.

练习 9.33 设非零复数 a_1, a_2, a_3, a_4, a_5 满足:

$$\begin{cases} \frac{a_2}{a_1} = \frac{a_3}{a_2} = \frac{a_4}{a_3} = \frac{a_5}{a_4} = q, \\ a_1 + a_2 + a_3 + a_4 + a_5 = S, \\ \frac{1}{a_1} + \frac{1}{a_2} + \frac{1}{a_3} + \frac{1}{a_4} + \frac{1}{a_5} = \frac{S}{4}, \end{cases}$$

其中 S 为实数且 $|S| \leq 2$, 求证: 复数 a_1, a_2, a_3, a_4, a_5 在复平面上所对应的点位于同一圆周上.

练习 9.34 已知 $p(z) = z^n + c_1 z^{n-1} + c_2 z^{n-2} + \cdots + c_n$ 是复变量 z 的实系数多项式, 且 $|p(i)| < 1$, 求证: 存在实数 a, b , 使得 $p(a + bi) = 0$ 且 $(a^2 + b^2 + 1)^2 < 4b^2 + 1$.

练习 9.35 设 z_1, z_2, z_3 为复数, 求证:

$$|z_1| + |z_2| + |z_3| + |z_1 + z_2 + z_3| \geq |z_1 + z_2| + |z_2 + z_3| + |z_3 + z_1|$$

练习 9.36 若 $a_k \geq 0$ ($k = 1, 2, \cdots, n$), 并规定 $a_{n+1} = a_1$, 使不等式 $\sum_{k=1}^n \sqrt{a_k^2 - a_k a_{k+1} + a_{k+1}^2} \geq \lambda \sum_{k=1}^n a_k$ 恒成立的实数 λ 的最大值为?