

函数专题讲义

1 基础知识

定义 1.1: 函数知识框架 函数的核心知识体系分为以下模块:



注意 函数是高中代数的核心内容，也是强基与竞赛的重点考察模块，与三角函数、数列、不等式、导数等内容深度关联。

强基竞赛高频考点包括：复合函数与含参二次函数的值域问题、函数四大性质的综合应用。

2 函数的性质

练习 2.1: 2020 重庆预赛 若实数 x, y 满足 $2^x + 4x + 12 = 0$, $\log_2(y-1)^3 + 3y + 12 = 0$, 则 $x + y =$ _____。

练习 2.2 设 x, y 满足 $(3x+y)^5 + x^5 + 4x + y = 0$ 。则满足该方程的点 (x, y) 一定在_____曲线上。

练习 2.3 设 t_1, t_2 是方程 $t^2 - (5a-2)t - 3a^2 - 7a + 1 = 0$ 的两个不等的实根。求实数 a 的值, 使得对于任何非零实数 m , 函数 $f(x) = \cos(m\pi x) \cos[(t_1^3 + t_2^3) \cdot \pi x]$ 是周期函数。

3 常用函数

练习 3.1: 2018 山东省 已知 $a, b \in \mathbb{Z}$, 且 $a + b$ 是方程 $x^2 + ax + b = 0$ 的一个根, 则 b 的最大可能值为_____。

练习 3.2: 2013 山东省 对任意的实数 x , 恒有 $\log_a(\sin x + \cos x)^2 \geq -2$ 成立, 则 a 的取值范围是_____。

练习 3.3 如果 $x \in [0, 1]$, 且 $\log_2 \log_2(2x + 2) + 2^{2x+2}$ 为整数, 则满足此条件的实数 x 有_____个。

4 函数最值问题

练习 4.1: 2018 广西 若定义在 $\mathbb{R}$ 上的函数 $f(x)$ 满足 $f'(x) - 2f(x) - 4 > 0$, $f(0) = -1$, 则不等式 $f(x) > e^{2x} - 2$ 的解集为_____。

练习 4.2 函数

$$y = \sqrt{2x^2 - 2x + 1} + \sqrt{2x^2 - (\sqrt{3} - 1)x + 1} + \sqrt{2x^2 + (\sqrt{3} + 1)x + 1}$$

的最小值为_____。

练习 4.3: 2020 重庆预赛 若 x, y 为实数, 则 $|2x + y|$ 、 $|x - y|$ 、 $|1 + y|$ 这三个数中的最大数的最小值是_____。

练习 4.4 已知奇函数 $f(x)$ 在 $(-\infty, 0) \cup (0, +\infty)$ 上有定义, 且在 $(0, +\infty)$ 上是增函数, $f(1) = 0$ 。又知函数 $g(\theta) = \sin^2 \theta + m \cos \theta - 2m$, $\theta \in [0, \frac{\pi}{2}]$, 集合 M, N 满足

$$M = \{m \mid \forall \theta, g(\theta) < 0\}, \quad N = \{m \mid \forall \theta, f[g(\theta)] < 0\}$$

求 $M \cap N$ 。

5 函数迭代与函数方程

练习 5.1 设 $f_1(x) = \sqrt{x^2 + 32}$, $f_{n+1}(x) = \sqrt{x^2 + \frac{16}{3}f_n(x)}$, $n = 1, 2, \dots$ 。对每个 n , 求 $f_n(x) = 3x$ 的实数解。

练习 5.2: 2018 福建 已知函数 $f(x)$ 满足: 对任意实数 x, y , 都有 $f(x+y) = f(x) + f(y) + 6xy$ 成立, 且 $f(-1) \cdot f(1) \geq 9$, 则 $f(\frac{2}{3}) = \underline{\hspace{2cm}}$ 。

练习 5.3 设 $f : \mathbb{N} \rightarrow \mathbb{N}$, 且对所有正整数 n , 有 $f(n+1) > f(n)$, $f(f(n)) = 3n$ 。则 $f(1997)$ 的值为_____。

练习 5.4: 2018 吉林 已知函数 $f(x)$ 满足: $f(1) = \frac{1}{4}$, $4f(x)f(y) = f(x+y) + f(x-y)$ ($x, y \in \mathbb{R}$), 则 $f(2019) =$ _____。

6 课后练习

作业 6.1: 2018 吉林 已知 $f(x) = \frac{(2^x+1)^2}{2^x \cdot x} + 1$ 在 $[-2018, 0) \cup (0, 2018]$ 上的最大值为 M , 最小值为 N , 则 $M + N =$ _____。

作业 6.2: 2018 湖北 设 $f(x)$ 是定义在 $(0, +\infty)$ 上的单调函数, 若对任意的 $x \in (0, +\infty)$, 都有 $f[f(x) - 2\log_2 x] = 4$, 则不等式 $f(x) < 6$ 的解集为_____。

作业 6.3: 2018 贵州 已知函数 $y = 3x + \sqrt{x^2 - 2x}$, 求该函数的值域。

作业 6.4 定义在 $x > 0$ 上的函数 $f(x)$ 满足:

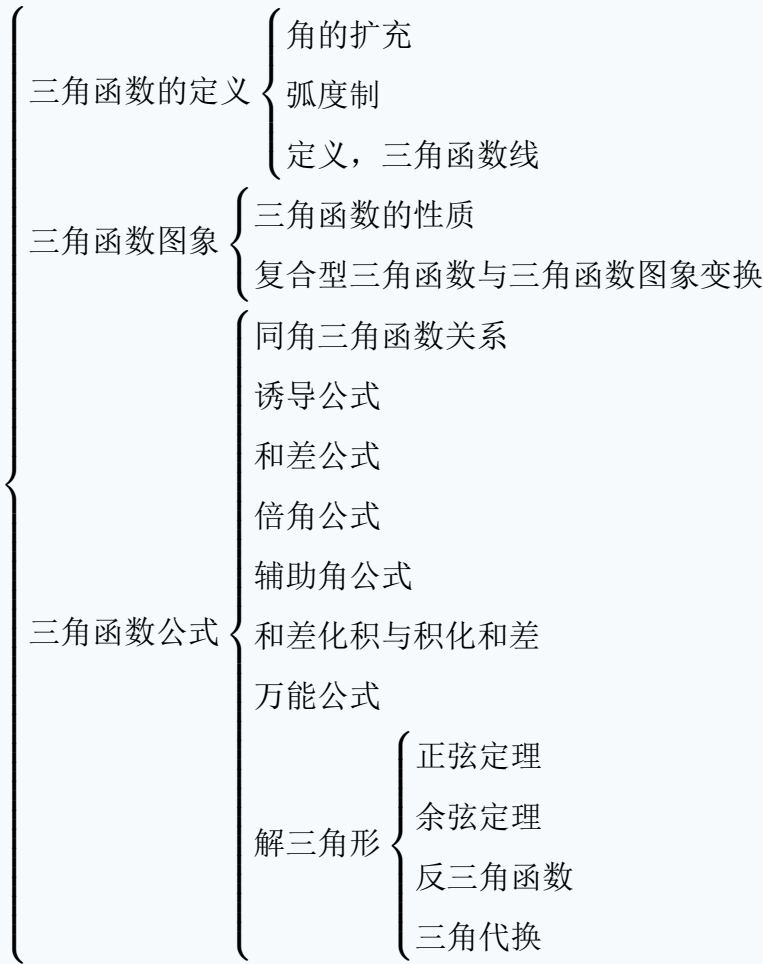
1. 存在 $a > 1$, 使 $f(a) \neq 0$;
2. 对任意的实数 b , 有 $f(x^b) = bf(x)$ 。

求证: 对于 $x > 2$, 有不等式 $f(x-1)f(x+1) < [f(x)]^2$ 。

三角函数专题讲义

1 基础知识

定义 1.1: 三角函数知识框架 三角函数的核心知识体系分为以下模块:



注意 三角函数的核心考点为三角函数的基本性质与三角恒等变形。

三角函数具有鲜明的单调性, 对称性与周期性, 三角恒等变形的核心在于掌握降次思想, 角度间的关联与经典变形模型; 解三角形问题常与三角恒等变形结合考察。

三角代换是高中数学的核心综合方法, 广泛应用于数列, 不等式, 解析几何, 函数, 复数等多个模块。

2 例题选讲

2.1 三角函数基本性质与三角方程

例题 2.1 方程 $\sin(3 \cos x) - 2\sqrt{\sin(3 \cos x)} \cdot \sin(2 \cos y) + 1 = 0$ 的实数解 (x, y) 为多少。

例题 2.2 满足 $\sin(x + \sin x) = \cos(x - \cos x)$ 的锐角 x 为多少。

例题 2.3 若 $\sin \alpha + \sin \beta = \sin \gamma, \cos \alpha + \cos \beta = -\cos \gamma$, 则 $\cos^2 \alpha + \cos^2 \beta + \cos^2 \gamma$ 的值为多少。

例题 2.4 设 $x, y \in \mathbb{R}$, 且 $\frac{\sin^2 x - \cos^2 x + \cos^2 x \cos^2 y - \sin^2 x \sin^2 y}{\sin(x+y)} = 1$, 则 $x - y$ 的值为多少。

2.2 三角恒等变形

例题 2.5 A, B, C 为 $\triangle ABC$ 的三个内角, 且 $\cot \frac{A}{2} + \cot \frac{B}{2} + \cot \frac{C}{2} - 2(\cot A + \cot B + \cot C) \geq T$ 。则 $T_{\max}$ 的值为多少。

例题 2.6 已知 $\frac{\sin^3 \alpha}{\sin(\frac{\pi}{6} - 3\alpha)} = \frac{\cos^3 \alpha}{\cos(\frac{\pi}{6} - 3\alpha)} = \sqrt{3}$ ($\alpha \neq \frac{k\pi}{4}, k \in \mathbb{Z}$)。则 $\tan 2\alpha$ 的值是多少。

例题 2.7 若 $0 < x < \frac{\pi}{2}$, 则 $\tan x + \cot x + \frac{1}{\sin x} - \frac{1}{\cos x}$ 的取值范围是多少。

例题 2.8 已知 $f(x) = (\sin x + 4 \sin \theta + 4)^2 + (\cos x - 5 \cos \theta)^2$ 的最小值为 $g(\theta)$ 。则 $g(\theta)$ 的最大值是多少。

例题 2.9 已知 $\frac{\cos \alpha \cos \frac{\beta}{2}}{\cos(\alpha - \frac{\beta}{2})} + \frac{\cos \beta \cos \frac{\alpha}{2}}{\cos(\beta - \frac{\alpha}{2})} = 1$, 则 $\cos \alpha + \cos \beta$ 的值等于多少。

2.3 解三角形

例题 2.10 设 $\triangle ABC$ 的内角 A, B, C 所对的边分别为 a, b, c , 且 $2a \cos C = 2b - c$ 。

1. 求角 A 的大小。
2. 若 $a = 1$, 求 $b + c$ 的取值范围。

例题 2.11 在 $\triangle ABC$ 中, $\sin^2 A + \sin^2 C = 2018 \sin^2 B$, 则 $\frac{(\tan A + \tan C) \tan^2 B}{\tan A + \tan B + \tan C}$ 的值为多少。

例题 2.12 平面上有四点 A, B, C, D , 其中 A, B 为定点, 且 $|AB| = \sqrt{3}$, C, D 为动点, 且 $|AD| = |DC| = |BC| = 1$, 记 $S_{\triangle ABD} = S$ 为 $\triangle ABD$ 的面积, $S_{\triangle BCD} = T$ 为 $\triangle BCD$ 的面积。则 $S^2 + T^2$ 的取值范围是多少。

例题 2.13 设 M, N 是线段 AB 上两点, $\frac{AM}{MB} = \frac{1}{4}, \frac{AN}{NB} = \frac{3}{2}$, 以 AB 为斜边任作 $\text{Rt} \triangle ABC$ 。再作 $MD \perp BC$ 于 $D, ME \perp AC$ 于 $E, NF \perp BC$ 于 $F, NG \perp AC$ 于 G , 则比值 $y = \frac{MD+ME+NF+NG}{AB+BC+AC}$ 之最大可能值为多少。

2.4 三角函数综合

例题 2.14 设 $x, y \in \mathbb{R}$ 满足 $x - 6\sqrt{y} - 4\sqrt{x-y} + 12 = 0$, 则 x 的取值范围是多少。

例题 2.15 与三角式 $2\left(\cos 2\theta + \cos \theta + \frac{1}{2}\right)\left(\cos 4\theta - \cos 3\theta + \cos \theta - \frac{1}{2}\right)$ 恒等的是 $\circ$

A. $\cos 6\theta + \cos 3\theta + \frac{1}{2}$

B. $\cos 6\theta + \cos 3\theta - \frac{1}{2}$

C. $\cos 5\theta + \cos 4\theta + \frac{1}{2}$

D. $\cos 5\theta + \cos 4\theta - \frac{1}{2}$

例题 2.16 已知数列 $\{a_n\} : a_1 \in \left(\frac{1}{3}, 1\right), a_{n+1} = \sin \frac{a_n \pi}{2}$ 。证明： $\frac{1-a_{n+1}}{1-a_n} < \frac{\pi}{4}$ 。

3 课后练习

作业 3.1 设 $\sin x + \cos x = \frac{1}{2}$, 则 $\sin^3 x + \cos^3 x$ 的值为多少。

作业 3.2 在 $\triangle ABC$ 中, 内角 A, B, C 所对的边分别是 a, b, c 。若 $a = 2, b = 3, C = 2A$, 则 $\cos C$ 的值为多少。

作业 3.3 设 $t \in [0, 2\pi)$, 并且满足 $(1 + \sin t)(1 + \cos t) = \frac{5}{4} + \frac{\sqrt{6}}{2}$, 则 t 的值为多少。

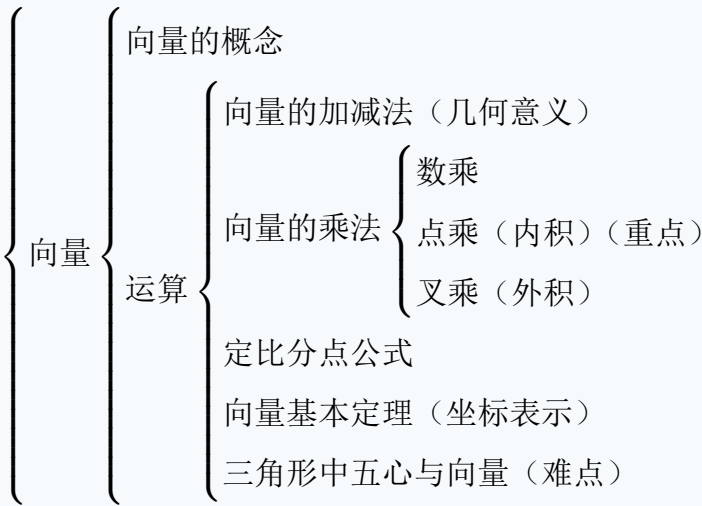
作业 3.4 已知函数 $f(x) = \sin^4 x$ 。

1. 记 $g(x) = f(x) + f\left(\frac{\pi}{2} - x\right)$, 求 $g(x)$ 在 $\left[\frac{\pi}{6}, \frac{3\pi}{8}\right]$ 上的最大值与最小值。
2. 求 $f\left(\frac{\pi}{180}\right) + f\left(\frac{2\pi}{180}\right) + f\left(\frac{3\pi}{180}\right) + \cdots + f\left(\frac{88\pi}{180}\right) + f\left(\frac{89\pi}{180}\right)$ 的值。

向量与复数专题讲义

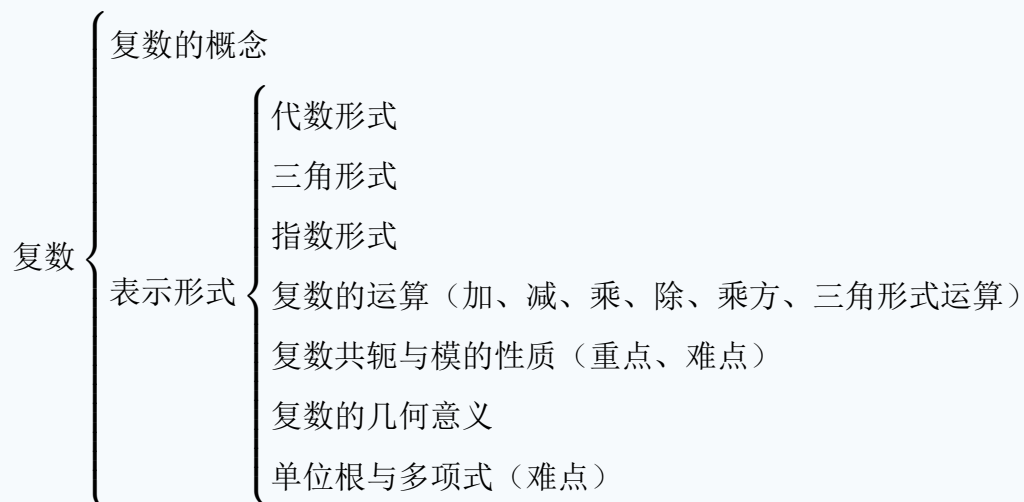
1 基础知识

定义 1.1: 平面向量知识框架 平面向量的核心知识体系分为以下模块:



注意 向量不作为核心重点考察内容，更多作为解题工具使用：高考中立体几何的向量法、解析几何中用向量的几何意义分析均为高频应用，其中向量的内积是相对考察较多的内容。

定义 1.2: 复数知识框架 复数的核心知识体系分为以下模块:



注意 复数与向量虽在几何意义上有对应关系，但二者的应用范围与核心性质差异极大，复数在高等数学中有着更广泛的应用。

高考中复数考察难度较低，强基与竞赛中复数的考察频次近年有所提升，其中复数的三角形式、共轭复数、模的性质以及多项式是高频考点。

2 向量

练习 2.1 空间四点 A, B, C, D 满足 $|\overrightarrow{AB}| = 3, |\overrightarrow{BC}| = 7, |\overrightarrow{CD}| = 11, |\overrightarrow{DA}| = 9$, 则 $\overrightarrow{AC} \cdot \overrightarrow{BD}$ 的取值为多少。

练习 2.2: 2020 浙江预赛 设平面上不共线的三个单位向量 $\vec{a}, \vec{b}, \vec{c}$, 满足 $\vec{a} + \vec{b} + \vec{c} = \vec{0}$ 。若 $0 \leq t \leq 1$, 则 $|-2\vec{a} + t\vec{b} + (1-t)\vec{c}|$ 的取值范围为多少。

练习 2.3 $\triangle ABC$ 中, 三边长分别为 $AB = \sqrt{7}, BC = \sqrt{3}, CA = \sqrt{2}$, 则 $\overrightarrow{AB} \cdot \overrightarrow{BC} + \sqrt{2}\overrightarrow{BC} \cdot \overrightarrow{CA} + \sqrt{3}\overrightarrow{CA} \cdot \overrightarrow{AB}$ 的值为多少。

3 复数的性质

练习 3.1 设 $a, b \in \mathbb{R}_-, i^2 = -1$ ，且存在 $z \in \mathbb{C}$ ，适合

$$\begin{cases} z + \bar{z}|z| = a + bi \\ |z| \leq 1 \end{cases}$$

则 ab 的最大值等于多少。

练习 3.2 已知虚数 z 满足 $z^3 + 1 = 0$ ，则 $\left(\frac{z}{z-1}\right)^{2018} + \left(\frac{1}{z-1}\right)^{2018}$ 的值为多少。

练习 3.3 已知关于 x 的实系数方程 $x^2 - 2x + 2 = 0$ 和 $x^2 + 2mx + 1 = 0$ 的四个不同的根在复平面上对应的点共圆，则 m 的取值范围是多少。

4 复数的运算

练习 4.1 设复数 $z = x + yi$ ，其中 x, y 是实数， i 是虚数单位。若 z 的虚部和 $\frac{z-i}{1-z}$ 的实部都非负，则满足条件的点 (x, y) 所构成平面区域的面积是多少。

练习 4.2 复数 $z_1 = \frac{1}{1+\cos\theta+i\sin\theta} + \frac{1}{1+\cos\theta-i\sin\theta}$, $z_2 = \frac{\cos\theta+i\sin\theta}{1+\cos\theta+i\sin\theta} + \frac{\cos\theta+i\sin\theta}{1+\cos\theta-i\sin\theta}$ 的关系为多少。

5 复数的模与共轭

练习 5.1 设 i 为虚数单位, a 和 b 为正整数, 且 $|(a+i)(2+i)| = \left| \frac{b-i}{2-i} \right|$, 则 $a+b$ 的值为多少。

练习 5.2: 2020 重庆预赛 若二次实系数方程 $ax^2 + bx + c = 0$ 有 2 个虚根 x_1, x_2 , 且 $x_1^3 \in \mathbf{R}$, 则 $\frac{ac}{b^2}$ 的值为多少。

练习 5.3 已知 $\triangle ABC$ 三边的长分别是 a, b, c , 复数 z_1, z_2 满足: $|z_1| = a, |z_2| = b, |z_1 + z_2| = c$, 那么复数 $\frac{z_1}{z_2}$ 一定 ()

- A. 是实数
- B. 是虚数
- C. 不是实数
- D. 不是纯虚数

练习 5.4 复数 z_1, z_2, z_3, z_4, z_5 满足

$$\begin{cases} |z_1| \leq 1 \\ |z_2| \leq 1 \\ |2z_3 - (z_1 + z_2)| \leq |z_1 - z_2| \\ |2z_4 - (z_1 + z_2)| \leq |z_1 - z_2| \\ |2z_5 - (z_3 + z_4)| \leq |z_3 - z_4| \end{cases}$$

求 $|z_5|$ 的最大值。

练习 5.5 在复平面上，曲线 $z^4 + z = 1$ 与圆周 $|z| = 1$ 的交点的个数是多少。

练习 5.6: 2019 高联 称一个复数数列 $\{z_n\}$ 为“有趣的”，若 $|z_1| = 1$ ，且对任意正整数 n ，均有 $4z_{n+1}^2 + 2z_n z_{n+1} + z_n^2 = 0$ 。求最大的常数 C ，使得对一切有趣的数列 $\{z_n\}$ 及任意正整数 m ，均有 $|z_1 + z_2 + \cdots + z_m| \geq C$ 。

6 复数的几何意义

练习 6.1 设复数 z 满足 $|z - i| = 2$ ，则 $|z - \bar{z}|$ 的最大值为多少。（ i 为虚数单位， $\bar{z}$ 为复数 z 的共轭复数）

练习 6.2 设复数 z 满足 $\left|z + \frac{1}{z}\right| \leq 2$ ，则 $|z|$ 的取值范围是多少。

练习 6.3 n 为自然数, $r > 0$ 为实数。证明: 方程 $x^{n+1} + rx^n - r^{n+1} = 0$ 没有模为 r 的复数根。

7 单位根与多项式

练习 7.1 已知 i 为虚数单位, 则在 $(\sqrt{3} + i)^{10}$ 的展开式中, 所有奇数项的和是多少。

练习 7.2: 2020 浙江预赛 设 z 为复数, 且 $|z| = 1$ 。当 $|1 + z + 3z^2 + z^3 + z^4|$ 取得最小值时, 求此时的复数 z 。

练习 7.3 设复数 $z \neq 1, z^{13} = 1$ 。则 $z^1 + z^3 + z^4 + z^9 + z^{10} + z^{12}$ 的值为多少。

8 课后练习

作业 8.1 已知 $a, b \in \mathbb{R}$ ，复数 $z = a + 4i$ ，且 $\frac{z}{z+b} = 4i$ ，则 $b = (\quad)$

A. -16

B. 1

C. 16

D. 17

作业 8.2 复数 z 的模 $|z| = 1$ ，且 $z^{11} + z = 1$ ，则 z 的值为多少。

作业 8.3 在复平面内, 复数 z_1, z_2, z_3 的对应点分别为 Z_1, Z_2, Z_3 。若 $|z_1| = |z_2| = \sqrt{2}$, $\overrightarrow{OZ_1} \cdot \overrightarrow{OZ_2} = 0$, $|z_1 + z_2 - z_3| = 1$, 则 $|z_3|$ 的取值范围是多少。

作业 8.4 已知 $(1 + ix)^{4n+2} (x \in \mathbb{R})$ 展开式中的实部是关于 x 的多项式, 则此多项式的系数和为多少。