

初升高代数衔接讲义

目录

第一章 根式的恒等变形	1
1.1 根式表达式变形问题	1
1.1.1 根式配方问题	1
1.1.2 根式共轭运算与有理化	3
第二章 因式分解与重要恒等式	6
2.1 单元多项式的因式分解	6
2.1.1 二次多项式十字分解与待定系数法	8
2.1.2 完全平方公式与平方差的综合运用	8
2.1.3 高次单变元多项式的因式分解	9
2.2 多元高次表达式的因式分解	13
2.2.1 幂方和幂方差公式	13
2.2.2 三元立方和公式	14
2.2.3 三元对称多项式与三元幂和公式	15
第三章 多元方程组	17
3.1 消元法解多元方程	17
3.2 对称方程	19
3.3 方程组间的整体信息	19
第四章 一元二次方程与二次函数	20
4.1 一元二次方程的求解	20
4.2 判别式法与配方法	22
4.3 多项式方程根的分布问题	24
第五章 一元二次方程根与系数的关系	26
5.1 一元二次方程的韦达定理	26
5.2 一元三次方程的韦达定理	29
第六章 习题	30
6.1 课后作业	30

第一章 根式的恒等变形

对于一个非负实数 a ，我们一定能找一个非负实数 x 满足

$$x^2 = a$$

则称这个非负实数 x 为 a 的算数平方根，并记为 $x = \sqrt{a}$ 。根式 $x = \sqrt{a}$ 有两个重要的非负性： $x \geq 0$ ， $a \geq 0$ 。

1.1 根式表达式变形问题

1.1.1 根式配方问题

根式表达式化简中，一类常见的问题是开根运算恰好作用在一个完全平方式之上，这需要我们对开根表达式具有的特殊形式十分敏感。

例题 1.1 计算 $\sqrt{3 - 2\sqrt{2}}$ 。

注：一般地，利用待定系数的方法我们可以确定 $a + b\sqrt{c}$ 如何写成 $(d + e\sqrt{c})^2$ 的形式。

例题 1.2 化简以下表达式：

$$\sqrt{2024 \times 2023 \times 2022 \times 2021 + 1}$$

运用相同的方法我们也可以解决下面的问题。

例题 1.3 化简以下表达式：

$$\sqrt{2024^2 + 2024^2 \times 2023^2 + 2023^2}$$

例题 1.4 计算：

$$\sqrt{1 + \frac{1}{1^2} + \frac{1}{2^2}} + \sqrt{1 + \frac{1}{2^2} + \frac{1}{3^2}} + \cdots + \sqrt{1 + \frac{1}{2023^2} + \frac{1}{2024^2}}$$

例题 1.5 a, b 是正实数，化简：

$$\sqrt{a^2 + \frac{1}{b^2} + \frac{a^2}{(ab+1)^2}}$$

例题 1.6 求以下方程的实数解：

$$\sqrt{x - 2\sqrt{x - 1}} + \sqrt{x + 8 - 6\sqrt{x - 1}} = 2$$

例题 1.7 求以下方程的实数解：

$$x + y + z + 12 = 2\sqrt{x - 1} + 4\sqrt{y + 1} + 6\sqrt{z - 3}$$

1.1.2 根式共轭运算与有理化

共轭根式化简问题中，利用共轭无理数之间的关系能够快速化简根式。

例题 1.8 化简以下表达式：

$$\sqrt{6 - \sqrt{35}} + \sqrt{6 + \sqrt{35}}$$

以上问题可以化为如下一般形式：

例题 1.9 实数 a, b 满足 $a^2 - b > 0$ ，则

$$\begin{aligned}\sqrt{a + \sqrt{b}} &= \sqrt{\frac{a + \sqrt{a^2 - b}}{2}} + \sqrt{\frac{a - \sqrt{a^2 - b}}{2}} \\ \sqrt{a - \sqrt{b}} &= \sqrt{\frac{a + \sqrt{a^2 - b}}{2}} - \sqrt{\frac{a - \sqrt{a^2 - b}}{2}}\end{aligned}$$

运用相同的方法我们可以解决下面的问题。

例题 1.10 计算：

$$\sqrt[3]{2 + \sqrt{5}} + \sqrt[3]{2 - \sqrt{5}}$$

下面，我们看三道利用共轭分式有理化分子的题目。

例题 1.11 比较 $\sqrt{6} - \sqrt{5}$ 和 $\sqrt{11} - \sqrt{10}$ 的大小。

例题 1.12 实数 x, y 满足 $(x + \sqrt{x^2 + 1})(y + \sqrt{y^2 + 1}) = 1$ 。证明： $x + y = 0$ 。

例题 1.13 正实数 a, b, c 满足 $a + c = 2b$ ，证明：

$$\frac{1}{\sqrt{a} + \sqrt{b}} + \frac{1}{\sqrt{b} + \sqrt{c}} = \frac{2}{\sqrt{a} + \sqrt{c}}$$

第二章 因式分解与重要恒等式

因式分解的定义是将一个多项式 f 写成两个次数更低多项式 g, h 乘积的形式：

$$f = g \times h$$

其中 f, g, h 可以是单变元多项式也可以是多变元多项式。

一个多项式 f 如果不能写成两个次数更低的多项式的乘积时，则称这个多项式是不可分解或者不可约多项式；将一个多项式写成若干个不可分解的多项式乘积的形式称为这个多项式的完全因式分解。需要注意的是，一个因式的可分解性会随着我们对系数的不同要求发生改变，例如对于多项式 $x^2 - 2$ ，这个多项式在有理数范围内不能因式分解，但是在实数范围内有如下因式分解：

$$x^2 - 2 = (x - \sqrt{2})(x + \sqrt{2})$$

2.1 单元多项式的因式分解

单元多项式是关于一个未知数（例如 x ）的非负整数次幂的有限和：

$$f(x) = a_n x^n + a_{n-1} x^{n-1} + \cdots + a_1 x + a_0, \quad a_n \neq 0$$

关于多项式，如下定理是重要的：

定理 2.1: 2.1 对于任意多项式 f, g ，存在唯一的多项式 h, r 使得：

$$f(x) = g(x)h(x) + r(x)$$

并且 $\deg r < \deg g$ ，其中 $r(x)$ 称为 $f(x)$ 除以 $g(x)$ 的余式。

例题 2.1 计算 $x^4 + x^3 + 2x + 4$ 除以 $x^2 + 2x + 4$ 的余式。

定理 2.2: 2.3: 余式定理 对于任意一个多项式 $f(x)$ 和一个一次多项式 $(x - a)$ ，我们总可以唯一找到一个多项式 $g(x)$ 满足：

$$f(x) = (x - a)g(x) + f(a)$$

特别地，当满足 $f(a) = 0$ ，即 a 是多项式 $f(x)$ 的一个根时我们有：

定理 2.3: 2.4: 零点定理 a 是多项式 $f(x)$ 的一个根当且仅当存在一个多项式 $g(x)$ 满足：

$$f(x) = (x - a)g(x)$$

零点定理有助于我们对单变元多项式进行因式分解。

2.1.1 二次多项式十字分解与待定系数法

对于单变元二次函数的因式分解实际上是解这个一元二次方程。一元二次多项式的因式分解固然简单，但是它是多元二次多项式因式分解的基石。

例题 2.2 求所有的实数 k ，使得多项式

$$x^2 - 2xy + ky^2 + 3x - 5y + 2$$

能分解成两个一次因式乘积的形式。

2.1.2 完全平方公式与平方差的综合运用

对于两个平方和，如果它们对应的交叉项也是完全平方项，则可以利用完全平方公式和平方差公式继续变形。

例题 2.3 因式分解：

1. $x^4 + 4$

2. $x^4 - 7x^2 + 1$

例题 2.4 计算：

$$\frac{(7^4 + 64)(15^4 + 64)(23^4 + 64)(31^4 + 64)(39^4 + 64)}{(3^4 + 64)(11^4 + 64)(19^4 + 64)(27^4 + 64)(35^4 + 64)}$$

2.1.3 高次单变元多项式的因式分解

对于高次单变元多项式因式分解问题，最有力的工具是零点定理。我们如果知道了这个多项式的一个零点，则可以通过零点定理写出它的一个一次因式，进而起到降次的作用。

定理 2.4: 2.9: 整系数多项式的有理根 对于整系数多项式

$$f(x) = a_n x^n + a_{n-1} x^{n-1} + \cdots + a_1 x + a_0$$

它的有理根 $x = \frac{q}{p}$ (其中 p, q 是互质的整数)，则有 $p \mid a_n, q \mid a_0$ 。

推论 2.1: 2.10 首项系数为 1 的整系数多项式，有理根一定是整数根。

现在利用多项式零点定理猜根的方法来对高次多项式因式分解。

例题 2.5 因式分解：

$$x^3 + 5x + 6$$

例题 2.6 因式分解：

$$x^4 + 2x^3 - 9x^2 - 2x + 8$$

| **例题 2.7** 已知多项式 $x^2 + x - 6$ 是 $2x^4 + x^3 - ax^2 + bx + a + b - 1$ 的因式, 求 a, b 的值。

| **例题 2.8** 已知多项式 $x^2 - 3x - 1$ 的两根也是 $x^4 + ax^2 + bx + c$ 的根, 求 $a + b - 2c$ 的值。

| **例题 2.9** 若代数式 $x^3 + y^3 + 3x^2y + axy^2$ 含有因式 $x - y$, 求 a 的取值, 并代入进行因式分解。

例题 2.10 证明：对于任意正整数 n ，有幂方差公式

$$x^n - 1 = (x - 1)(x^{n-1} + x^{n-2} + \cdots + x + 1)$$

对于任意正奇数 n ，有幂方和公式

$$(x^n + 1) = (x + 1)(x^{n-1} - x^{n-2} + \cdots + x^2 - x + 1)$$

注：需要强调的是，以上恒等式并不一定是因式分解的最终形式，例如：

$$x^6 - 1 = (x - 1)(x^5 + x^4 + x^3 + x^2 + x + 1) = (x - 1)(x + 1)(x^2 + x + 1)(x^2 - x + 1)$$

一些高次多项式没有有理数根，从而不再适合使用猜根法进行降次因式分解，此时我们需要通过幂方和公式与幂方差公式进行适当的分组分解。

例题 2.11 因式分解：

$$x^7 + x^5 + 1$$

例题 2.12 因式分解：

$$x^8 + x^6 + x^4 + x^2 + 1$$

例题 2.13 计算：

$$(a+1)(a^2+1)(a^4+1)(a^8+1)(a^{16}+1)$$

在本节的最后我们需要指出关于单变元多项式的重要结论：对于一个单变元多项式，在实系数范围内一定可以分解成若干个二次多项式和一次多项式乘积的形式。于是我们得到了如下推论和方法：

- (1) 在实系数范围内，奇次数多项式一定能分解一个一次因式出来；
- (2) 对于一个次数不太高的多项式，例如 4 次多项式，可以用待定系数法把它设为两个二次多项式的乘积。

2.2 多元高次表达式的因式分解

2.2.1 幂方和幂方差公式

命题 2.1: 2.20: 幂方和幂方差公式 对于任意正整数 n , 有:

$$x^n - y^n = (x - y)(x^{n-1} + x^{n-2}y + \cdots + xy^{n-2} + y^{n-1})$$

对于任意正奇数 n , 有:

$$x^n + y^n = (x + y)(x^{n-1} - x^{n-2}y + \cdots + x^2y^{n-2} - xy^{n-1} + y^n)$$

例题 2.14 $f(x)$ 是一个整系数多项式, 证明: 对于任意 a, b , 有 $f(a) - f(b)$ 是 $a - b$ 的倍数。

2.2.2 三元立方和公式

三元立方和公式是十分重要的因式分解公式：

$$a^3 + b^3 + c^3 - 3abc = (a + b + c)(a^2 + b^2 + c^2 - ab - bc - ca)$$

对于三元立方和公式，我们立刻得到如下推论：

例题 2.15 求以下方程正整数解 (m, n) 的组数：

$$m^3 + n^3 + 99mn = 33^3$$

三元立方和公式的另一个直接推论是如下不等式：

例题 2.16: 2.24 对于非负实数 a, b, c ，我们有：

$$a^3 + b^3 + c^3 \geq 3abc$$

例题 2.17 证明：当 $a, b, c \geq 1$ 时，有

$$a^3b^3 + b^3c^3 + c^3a^3 + 3abc \geq a^3 + b^3 + c^3 + 3(abc)^2$$

2.2.3 三元对称多项式与三元幂和公式

我们称关于 a, b, c 的如下三个多项式 $a + b + c$, $ab + bc + ca$, abc 为三元基本对称多项式。对于一般关于 a, b, c 完全对称的多项式, 都可以由这三个对称式表示出来。三元基本对称多项式之间有一些常用的关系:

$$(a + b + c)^2 = a^2 + b^2 + c^2 + 2(ab + bc + ca)$$

$$a^3 + b^3 + c^3 - 3abc = (a + b + c)(a^2 + b^2 + c^2 - ab - bc - ca)$$

我们称关于 a, b, c 的三元多项式 $S_k = a^k + b^k + c^k$ 为 k 阶幂和。幂和之间有着重要的递推关系, 当 n 为正整数时, 有:

$$S_{n+3} = (a + b + c)S_{n+2} - (ab + bc + ca)S_{n+1} + abcS_n$$

当 $n = 0$ 时, 幂和公式退化为三元立方和公式:

$$a^3 + b^3 + c^3 = (a + b + c)(a^2 + b^2 + c^2) - (ab + bc + ca)(a + b + c) + 3abc$$

三元幂和公式最重要作用是在已知 $a + b + c$, $ab + bc + ca$, abc 三个表达式的值后, 可以得到任意正整数对应幂和 $a^n + b^n + c^n$ 的值。

例题 2.18 实数 a, b, c 满足 $a + b + c = 0$, 证明:

$$2(a^4 + b^4 + c^4) = (a^2 + b^2 + c^2)^2$$

例题 2.19 实数 a, b, c 满足 $a + b + c = 0$, 证明:

$$\frac{a^5 + b^5 + c^5}{5} = \left(\frac{a^3 + b^3 + c^3}{3} \right) \left(\frac{a^2 + b^2 + c^2}{2} \right)$$

例题 2.20 已知 $a + b + c = 5$, $a^2 + b^2 + c^2 = 15$, $a^3 + b^3 + c^3 = 47$, 求以下表达式的值:

$$(a^2 + ab + b^2)(b^2 + bc + c^2)(c^2 + ca + a^2)$$

第三章 多元方程组

本章我们重点关注方程组求解问题。

3.1 消元法解多元方程

消元法是解方程组问题中最直接最朴素的方法，通过消元化多元方程组为一元方程。我们先通过最简单的线性方程的加减消元法来体会消元思路。

例题 3.1 实数 x, y, z 满足 $xyz \neq 0$ ，且

$$\begin{cases} 4x - 3y - 6z = 0 \\ x + 2y - 7z = 0 \end{cases}$$

求代数式 $\frac{5x^2 + 2y^2 - z^2}{2x^2 - 3y^2 - 10z^2}$ 的值。

例题 3.2: 93 全国初联 实数 $a_1 > a_2 > a_3 > a_4 > a_5$ 满足

$$\begin{cases} x_1 + x_2 + x_3 = a_1 \\ x_2 + x_3 + x_4 = a_2 \\ x_3 + x_4 + x_5 = a_3 \\ x_4 + x_5 + x_1 = a_4 \\ x_5 + x_1 + x_2 = a_5 \end{cases}$$

比较 x_1, x_2, x_3, x_4, x_5 的大小。

例题 3.3 已知关于 k 的方程组

$$\begin{cases} kx + y + z = 1 \\ x + ky + z = k \\ x + y + kz = k^2 \end{cases}$$

分别当 k 取何值时，方程组有唯一解？有无穷多组解？没有解？

例题 3.4 记 $[x]$ 表示不超过 x 的最大整数， $\{x\}$ 表示 x 的小数部分，解方程组：

$$\begin{cases} x + [y] + \{z\} = -0.9 \\ [x] + \{y\} + z = 0.2 \\ \{x\} + y + [z] = 1.3 \end{cases}$$

对于一般的多元方程（不再局限于一次方程），就要结合方程的具体形式来寻找合理的消元方法。

例题 3.5 解方程组：

$$\begin{cases} x + y + xy = 8 \\ y + z + yz = 15 \\ z + x + zx = 35 \end{cases}$$

3.2 对称方程

处理对称方程的常用方法就是将方程都化成基本对称式的形式。

例题 3.6: 20 巴尔干初中竞赛 求以下方程的实数解:

$$\begin{cases} a + b + c = \frac{1}{a} + \frac{1}{b} + \frac{1}{c} \\ a^2 + b^2 + c^2 = \frac{1}{a^2} + \frac{1}{b^2} + \frac{1}{c^2} \end{cases}$$

3.3 方程组间的整体信息

有一些方程组中的方程具有明显的（轮换）对称性，这个时候可构造一个完全对称方程，以便我们解决相应问题。

例题 3.7 正数 a, b, c, d, e, f 满足

$$\begin{cases} \frac{bcdef}{a} = 4, \frac{cdefa}{b} = 9, \frac{defab}{c} = 16 \\ \frac{efabc}{d} = \frac{1}{4}, \frac{fabcd}{e} = \frac{1}{9}, \frac{abcde}{f} = \frac{1}{16} \end{cases}$$

求 a, b, c, d, e, f 的值。

例题 3.8 实数 a, b, c 满足 $abc \neq 0$ ，且方程 $ax^2 + bx + c = 0$, $bx^2 + cx + a = 0$, $cx^2 + ax + b = 0$ 恰有一个公共的实根，求这个公共实根。

第四章 一元二次方程与二次函数

对于实系数一元二次方程

$$ax^2 + bx + c = 0, \quad a \neq 0$$

的解法非常经典，利用完全平方公式对二次项和一次项进行配方，得到

$$\left(x + \frac{b}{2a}\right)^2 = \frac{b^2 - 4ac}{4a^2}$$

于是，以上一元二次方程的实数解取决于 $\Delta = b^2 - 4ac$ 的正负性，当 $\Delta > 0$ 时，方程有两个互异的实根：

$$x_1 = \frac{-b + \sqrt{b^2 - 4ac}}{2a}, \quad x_2 = \frac{-b - \sqrt{b^2 - 4ac}}{2a}$$

当 $\Delta = 0$ 时，方程具有两个相等的实根；当 $\Delta < 0$ 时，方程没有实数根。

利用配方法，我们立刻得到了二次函数对称轴和最值性质。对于二次函数 $y = ax^2 + bx + c$ ，它的图像是轴对称的，并且对称轴为 $x = -\frac{b}{2a}$ 。当 $a > 0$ 时，二次函数有最小值 $\frac{4ac - b^2}{4a}$ ；当 $a < 0$ 时，二次函数有最大值 $\frac{4ac - b^2}{4a}$ 。

4.1 一元二次方程的求解

本节我们先简单熟悉有关一元二次方程的问题。

例题 4.1 方程

$$|x^2 + ax| = 4$$

仅有 3 个互不相等的实根，求 a 的取值范围。

例题 4.2 关于 x 的方程

$$x^3 + (1 - a)x^2 - 2ax + a^2 = 0$$

有且只有一个实根，求 a 的取值范围。

例题 4.3 证明：对于任意实数 x, a, b, c , 有

$$\frac{a^2(x-b)(x-c)}{(a-b)(a-c)} + \frac{b^2(x-c)(x-a)}{(b-c)(b-a)} + \frac{c^2(x-a)(x-b)}{(c-a)(c-b)} = x^2$$

例题 4.4 解方程：

$$2x^4 + x^3 - 6x^2 + x + 2 = 0$$

4.2 判别式法与配方法

对于一个二次表达式，可以根据方程实数解的存在性得到判别式的正负关系，然后利用判别式得到对应未知元范围，这种方法称为判别式法。

例题 4.5 实数 x, y 满足

$$x^2 - xy + 2y^2 - 2x + 4y + 5 = 0$$

且 $x \geq 0$ ，求 y 的取值范围。

例题 4.6: 16 清华领军 求函数

$$y = x + \sqrt{5x^2 - 4x + 1}$$

的最小值，其中 $x > 0$ 。

例题 4.7: 16 清华领军 实数 a, b, c 满足

$$\begin{cases} a + b + c = 1 \\ a^2 + b^2 + c^2 = 1 \end{cases}$$

求 a 的取值范围。

例题 4.8 求以下分式的取值范围：

$$y = \frac{6x^2 + 12x + 10}{x^2 + 2x + 2}$$

在求解一元二次方程和二次函数最值问题时，配方法发挥了重要的作用，自然地配方法可以推广到一般二次表达式最值问题中。

例题 4.9 求函数

$$f(x, y) = 2x^2 - 4xy + 8y^2 - 4x - 4y + 1$$

的最小值。

例题 4.10 实数 a, b 满足 $a^2 + b^2 = 1$ ，求 $a^4 + ab + b^4$ 的最小值和最大值。

4.3 多项式方程根的分布问题

本节我们跳出一元二次方程的框架，谈谈对于所有多项式根的分布问题。

多项式方程根的分布可以通过多项式函数的正负性来判断根的分布。如果我们想证明多项式 $f(x)$ 在一个区间 (a, b) 内有解，一个充分条件是证明：

$$f(a)f(b) < 0$$

这说明 $f(a), f(b)$ 肯定一正一负，而多项式函数的图像一定是一条连续的曲线，于是在 (a, b) 上的函数图像一定会穿过 x 轴，对应即是多项式 $f(x)$ 在这个区间上有一个零点。最后，我们需要说明的是我们不能通过

$$f(a)f(b) > 0$$

来说明 (a, b) 上没有零点，例如 $f(x) = x^2 - 1$ ，有 $f(2)f(-2) > 0$ ，但显然 $f(x)$ 在 $(-2, 2)$ 上有零点。

例题 4.11 对于实数 m ，若方程 $mx^2 + (m+2)x - 9m = 0$ 有两个实数解 $x_1 < x_2$ 满足 $x_1 < 1 < x_2$ ，求 m 的取值范围。

例题 4.12 实数 a, b, c 满足 $ac < 0$ 且 $\sqrt{2}a + \sqrt{3}b + \sqrt{5}c = 0$, 证明: 一元二次方程 $ax^2 + bx + c = 0$ 有一个根大于 $\sqrt{\frac{3}{5}}$ 且小于 1。

例题 4.13 证明: 对于所有实数 a , 方程

$$(a^3 - 2a^2 + 7a)x^2 - (a^3 + 4a^2 + 9a + 6)x + 5a^2 + 4 = 0$$

一定有实数根。

例题 4.14 实数 a, b, c 满足

$$a(a - b + c) < 0$$

证明:

$$b^2 > 4ac$$

第五章 一元二次方程根与系数的关系

韦达定理是描述一个多项式方程的根与系数之间关系的方程。

5.1 一元二次方程的韦达定理

对于一个一元二次方程 $ax^2 + bx + c = 0$ ，它有两个根 x_1, x_2 ，则它具有零点式 $a(x - x_1)(x - x_2)$ ，此时有：

$$ax^2 + bx + c = a(x - x_1)(x - x_2)$$

将右边的括号展开，对比系数得：

$$x_1 + x_2 = -\frac{b}{a}, \quad x_1x_2 = \frac{c}{a}$$

这便是一元二次方程的韦达定理。我们通过一些例题来练习韦达定理的运用。

例 5.1 已知方程 $2x^2 - 3x - 5 = 0$ 有两根 x_1, x_2 ，求 $x_1^2 + x_2^2$, $x_1^3 + x_2^3$, $x_1^5 + x_2^5$ 的值。

例题 5.2 实数 a, b, c, d 满足方程 $x^2 + ax + b = 0$ 的两根为 c, d ; $x^2 + cx + d = 0$ 的两根为 a, b , 求 (a, b, c, d) 。

例题 5.3: 07 初联 对于一切不小于 2 的自然数 n , 关于 x 的一元二次方程 $x^2 - (n+2)x - 2n^2 = 0$ 的两个根记为 a_n, b_n , 计算:

$$\frac{1}{(a_2 - 2)(b_2 - 2)} + \frac{1}{(a_3 - 2)(b_3 - 2)} + \cdots + \frac{1}{(a_{2024} - 2)(b_{2024} - 2)}$$

例题 5.4 设 x_1, x_2 是一元二次方程 $x^2 + 4x - 3 = 0$ 的两个根, 且 $2x_1(x_2^2 + 5x_2 - 3) + a = 2$, 求 a 的值。

例题 5.5 设 $m \geq -1$, 关于 x 的方程

$$x^2 + 2(m-2)x + m^2 - 3m + 3 = 0$$

有两个不相等的实根 x_1, x_2 , 求以下表达式的最大值:

$$\frac{mx_1^2}{1-x_1} + \frac{mx_2^2}{1-x_2}$$

例题 5.6 实数 a, b, c 满足 $a + b + c = 0$, $abc = 1$, 证明: a, b, c 中必有一个大于 $\frac{3}{2}$ 。

5.2 一元三次方程的韦达定理

本质上多项式方程的韦达定理是一样的，我们可以通过一元二次方程韦达定理的推导得到一般多项式的韦达定理。设 $ax^3 + bx^2 + cx + d = 0$ 有三个根 x_1, x_2, x_3 ，则

$$ax^3 + bx^2 + cx + d = a(x - x_1)(x - x_2)(x - x_3)$$

展开括号以后对比系数，我们得到：

$$\begin{cases} x_1 + x_2 + x_3 = -\frac{b}{a} \\ x_1x_2 + x_2x_3 + x_3x_1 = \frac{c}{a} \\ x_1x_2x_3 = -\frac{d}{a} \end{cases}$$

例题 5.7: 22 清华零试 设 a, b, c 是多项式 $x^3 - 3x^2 - 2x + 1 = 0$ 的三个根，计算：

$$\frac{1}{a^4} + \frac{1}{b^4} + \frac{1}{c^4}$$

例题 5.8 设 a, b, c 是多项式 $x^3 - 3x + 1 = 0$ 的 3 个不同根，计算以下表达式的值：

$$\frac{1}{(a-1)^2} + \frac{1}{(b-1)^2} + \frac{1}{(c-1)^2}$$

第六章 习题

6.1 课后作业

作业 6.1 已知实数 a, b 满足

$$\sqrt{ab} + \sqrt{ab+1} + \sqrt{a^2+b}\sqrt{a+b^2} = 0$$

求表达式

$$b\sqrt{a^2+b} + a\sqrt{a+b^2}$$

的值。

作业 6.2 (1) 实数 x, y, z 满足 $xy = z^2$, 证明:

$$\frac{x}{x+z} + \frac{y}{y+z} = 1$$

(2) 求和:

$$\frac{\sqrt[2019]{a}}{\sqrt[2019]{a} + \sqrt{a}} + \frac{\sqrt[2019]{a^2}}{\sqrt[2019]{a^2} + \sqrt{a}} + \cdots + \frac{\sqrt[2019]{a^{2018}}}{\sqrt[2019]{a^{2018}} + \sqrt{a}}$$

作业 6.3 已知 $f(x) = x^5 + ax + b$ 在实系数范围内因式分解有因式 $(x+1)^2$, 求 a, b 。

作业 6.4 实数 $a > 1$, 对于任意正整数 n , 证明:

$$0 < \sqrt[n]{a} - 1 < \frac{a-1}{n}$$

作业 6.5 实数 a, b, c, d 满足 $a^2 + b^2 = c^2 + d^2 = 2$ 且 $ac = bd$, 证明: $a^2 + c^2 = b^2 + d^2 = 2$ 且 $ac = bd$ 。

作业 6.6 实数 a, b 满足 $a^3 + b^3 + 3ab = 1$, 求 $a + b$ 的值。

作业 6.7 若非零实数 a, b, c 满足 $a + b + c = 0$, 证明:

$$\frac{a^7 + b^7 + c^7}{7} = \left(\frac{a^5 + b^5 + c^5}{5} \right) \left(\frac{a^2 + b^2 + c^2}{2} \right) = 2 \left(\frac{a^4 + b^4 + c^4}{4} \right) \left(\frac{a^3 + b^3 + c^3}{3} \right)$$

$$\left(\frac{a^7 + b^7 + c^7}{7} \right) \left(\frac{a^3 + b^3 + c^3}{3} \right) = \left(\frac{a^5 + b^5 + c^5}{5} \right)^2$$

作业 6.8 解方程:

$$\frac{4x}{x^2 + 2x + 4} - \frac{3x}{x^2 - 3x + 4} = -\frac{7}{3}$$

作业 6.9 已知 a, b, c 为正数, 满足

$$\begin{cases} a + b + c = 32 \\ \frac{b + c - a}{bc} + \frac{c + a - b}{ca} + \frac{a + b - c}{ab} = \frac{1}{4} \end{cases}$$

证明: 以 $\sqrt{a}, \sqrt{b}, \sqrt{c}$ 为边的三角形是直角三角形。

作业 6.10 若正数 a, b, c 满足

$$\left(\frac{b^2 + c^2 - a^2}{2bc}\right)^2 + \left(\frac{c^2 + a^2 - b^2}{2ca}\right)^2 + \left(\frac{a^2 + b^2 - c^2}{2ab}\right)^2 = 3$$

求以下表达式的值：

$$\frac{b^2 + c^2 - a^2}{2bc} + \frac{c^2 + a^2 - b^2}{2ca} + \frac{a^2 + b^2 - c^2}{2ab}$$

作业 6.11 正实数 a, b, c, d 满足 $\frac{ab}{cd} = \frac{a+b}{c+d}$ 。证明：

$$(a+b)(c+d) \geq (a+c)(b+d)$$

作业 6.12 已知实数 a, b 满足 $16a^2 + 2a + 8ab + b^2 - 1 = 0$ ，求 $3a + b$ 的最小值。

作业 6.13 a, b, c, d, e 是互不相同的实数, 化简:

$$\begin{aligned} & \frac{a^5}{(a-b)(a-c)(a-d)(a-e)} + \frac{b^5}{(b-a)(b-c)(b-d)(b-e)} + \frac{c^5}{(c-a)(c-b)(c-d)(c-e)} \\ & + \frac{d^5}{(d-a)(d-b)(d-c)(d-e)} + \frac{e^5}{(e-a)(e-b)(e-c)(e-d)} \end{aligned}$$

作业 6.14 实数 a, b, c 满足

$$\begin{cases} a + b = 8 \\ ab - c^2 + 8\sqrt{3}c = 48 \end{cases}$$

求方程 $bx^2 + cx - a = 0$ 的根。

作业 6.15 设 a, b, c 是互不相等的实数, 且满足关系

$$\begin{cases} b^2 + c^2 = 2a^2 + 16a + 14 \\ bc = a^2 - 4a - 5 \end{cases}$$

求 a 的取值范围。

作业 6.16 b, c 为整数, 方程 $5x^2 + bx + c = 0$ 的两根都大于 0 小于 1, 求 b, c 的值。

作业 6.17 设 α, β 是方程 $x^2 - 3x - 5 = 0$ 的两根, 求

$$\frac{25}{2\alpha - 1} + \frac{13}{\alpha + 2\beta} + \beta^2$$

的值。

作业 6.18 求所有的有理数 r , 使得关于 x 的方程 $rx^2 + (r + 2)x + r - 1 = 0$ 有且只有整数根。

作业 6.19 已知三个不同的实数 a, b, c 满足 $a - b + c = 3$, 方程 $x^2 + ax + 1 = 0$ 和 $x^2 + bx + c = 0$ 有一个相同的实根, 方程 $x^2 + x + a = 0$ 和 $x^2 + cx + b = 0$ 也有一个相同的实根, 求 a, b, c 的值。

作业 6.20 已知 $a > b$ 为整数, 方程

$$3x^2 + 3(a + b)x + 4ab = 0$$

的两个根 α, β 满足关系

$$\alpha(\alpha + 1) + \beta(\beta + 1) = (\alpha + 1)(\beta + 1)$$

求满足要求的所有整数对 (a, b) 。

作业 6.21 a, b, c 是正整数, 抛物线 $y = ax^2 + bx + c$ 与 x 轴有两个不同的交点 A, B , 若 A, B 到原点的距离都小于 1, 求 $a + b + c$ 的最小值。